Material Teórico - Módulo Notação Algébrica e Introdução às Equações

Exercícios sobre Notação Algébrica

7º ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de maio de 2022

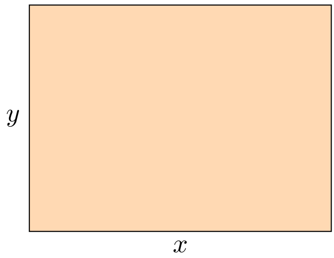
1 Exercícios sobre notação algébrica

Exemplo 1. *Joaquim deseja comprar um terreno na praia de Mundaú, para construir uma casa de veraneio. Depois de cinco anos de muita economia, ele conseguiu juntar a quantia de cem mil reais para esse fim. Então, Joaquim marcou um encontro com Jaime, que é corretor de imóveis e ficou de apresentar algumas opções. O primeiro terreno que Jaime apresentou a Joaquim tinha forma retangular, com* 15 *metros de largura e* 25 *metros de comprimento. Jaime informou a Joaquim que o preço do terreno era de R$ 250,00 por metro quadrado. Joaquim invocou os conhecimentos que adquiriu na escola, ainda no Ensino Fundamental, e percebeu rapidamente que o dinheiro que tinha era suficiente para comprar o terreno.*

(a) *Como ele chegou a essa conclusão?*

(b) *Nas próximas visitas, qual é a expressão algébrica que Joaquim deve utilizar para calcular os valores dos terrenos, sabendo que todos são retangulares, com dimensões x e y dadas em metros, e têm o mesmo valor por m^2 que o primeiro terreno?*

(c) *Sabendo que Joaquim deseja cercar o terreno (de dimensões x e y dadas em metros) com um muro, ao custo de R$ 30,00 por metro, qual é a expressão algébrica que representa o custo total do terreno, depois de cercado?*



Solução.

(a) Joaquim lembrou que a fórmula para o cálculo da área de um retângulo a partir das medidas das suas dimensões x e y é dada pela expressão algébrica

$$A = x \cdot y.$$

Desse modo, a área do terreno que Jaime apresentou é igual a

$$A = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2.$$

Como cada m^2 do terreno custa R$ 250,00, o preço T a ser pago seria

$$T = 375 \cdot 250 = 93.750 \text{ reais}.$$

Assim, Joaquim concluiu que o dinheiro que tinha seria suficiente para comprar o terreno.

(b) Uma vez que a área de um terreno retangular de dimensões x metros e y metros é dada por $x \cdot y$ metros quadrados e o preço do terreno é R$ 250,00 por metro quadrado, temos que o preço T de um terreno genérico, em reais, é dado pela expressão algébrica

$$T = x \cdot y \cdot 250 = 250xy.$$

(c) O comprimento do muro é igual ao perímetro do terreno, que é igual a

$$x + x + y + y = 2x + 2y.$$

Assim, o custo M do muro é dado pela *expressão algébrica*

$$M = (2x + 2y) \cdot 30 = 30 \cdot 2(x + y) = 60(x + y).$$

Logo, o valor total gasto por Joaquim para comprar o terreno e depois murá-lo é

$$V = T + M = 250xy + 60(x + y).$$

$\square$

Exemplo 2. *Para calcular a média bimestral de seus alunos, um professor usa o seguinte critério: multiplica a nota da prova por* 2*, soma o resultado com a nota de um trabalho e divide a soma obtida por 3.*

(*a*) *Se representarmos por n o número que expressa a média, por p a nota da prova e por t a nota do trabalho, encontre uma fórmula que pode ser utilizada para calcular a média bimestral.*

(*b*) *Qual é a média bimestral de um aluno obteve nota* 6 *na prova e nota* 9 *no trabalho?*

Solução.

(a) Como a nota da prova é representada por p, essa nota multiplicada por 2 é $2p$. Desse modo, a soma da nota da prova multiplicada por 2 com a nota do trabalho, que é representada por t, é $2p + t$. Portanto, uma fórmula para calcular a média bimestral é

$$n = \frac{2p + t}{3}.$$

(b) Um aluno obteve nota $p = 6$ na prova e $t = 9$ no trabalho tem média bimestral igual a

$$n = \frac{2 \cdot 6 + 9}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

□

Exemplo 3. *O que acontece com uma fração se diminuírmos o numerador em 40% e o denominador em 60%?*

(*a*) *Diminui 20%.*

(*b*) *Aumenta 20%.*

(*c*) *Diminui 50%.*

(*d*) *Aumenta 50%.*

(e) *Aumenta 30%.*

Solução. Vamos denotar a fração por $\frac{x}{y}$. Assim, se diminuírmos o numerador em 40% e o denominador em 60%, o numerador e o denominador da nova fração serão iguais a $x - 0{,}4x = 0{,}6x$ e $y - 0{,}6y = 0{,}4y$, respectivamente. Logo, a nova fração será

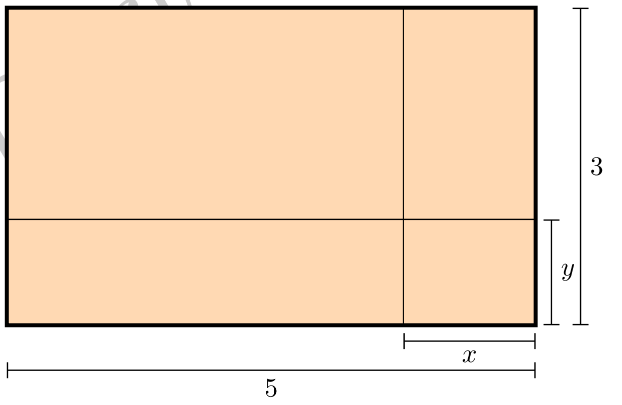
$$\frac{0{,}6x}{0{,}4y} = \frac{6x}{4y} = 1{,}5 \cdot \frac{x}{y}.$$

Agora, veja que

$$1{,}5 \cdot \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = (1{,}5 - 1)\frac{x}{y} = 0{,}5 \cdot \frac{x}{y}.$$

Portanto, a nova fração aumenta 50% em relação à original, ou seja, a alternativa correta é letra **(d)**. □

Exemplo 4 (ENEM). *Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é* $(5 - x)(3 - y)$.



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por

(a) $2xy$.

(b) $15 - 3x$.

(c) $15 - 5y$.

(d) $-5y - 3x$.

(e) $5y + 3x - xy$.

Solução. Veja que depois da lavagem o tecido encolheu e passou a ser um retângulo cujos lados medem $5 - x$ e $3 - y$. Assim, para calcular a área perdida, fazemos a diferença entre a área antes da lavagem, $3 \cdot 5 = 15$, e a área depois da lavagem, $(5 - x)(3 - y) = 15 - 5y - 3x + xy$. Logo, a área perdida é

$$\begin{aligned} 15 - (15 - 5y - 3x + xy) &= \cancel{15} - \cancel{15} + 5y + 3x - xy \\ &= 5y + 3x - xy. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 5. *Na subida de uma montanha morava um sábio que cobrava uma taxa de x moedas de todos os viajantes que passavam por lá. Ele recebia o pagamento e verificava a quantidade de moedas o viajante ainda possuía. Daí, entregava essa mesma quantidade ao viajante, dobrando a quantidade de moedas que havia sobrado. Um camponês saiu de casa com y moedas e teve de subir a montanha três vezes. Na segunda vez em que subiu, ele tinha a mesma quantidade de moedas que ficou na primeira vez e na terceira vez tinha a mesma quantidade de moedas que ficou na segunda vez. Com quantas moedas o camponês ficou após subir a montanha pela terceira vez?*

Solução. A tabela a seguir mostra as quantidades de moedas que o camponês possuía em cada um dos momentos em que ele esteve com o sábio.

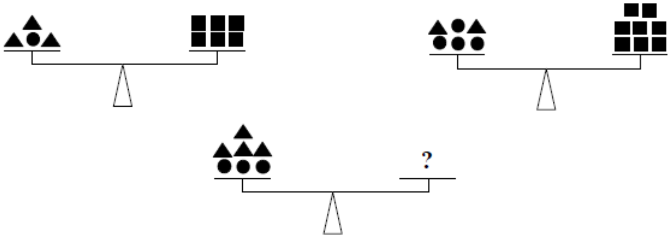
	1ª vez	2ª vez	3ª vez
tinha	y	$2y-2x$	$4y-6x$
deu ao sábio	x	x	x
restante	$y-x$	$2y-2x-x$	$4y-6x-x$
dobro	$2(y-x)$	$2(2y-3x)$	$2(4y-7x)$

Perceba que o que restou depois que ele deu x moedas ao sábio na 2ª vez que subiu foi $2y-2x-x=2y-3x$ e o que restou depois que ele deu x moedas ao sábio na 3ª vez que subiu foi $4y-6x-x=4y-7x$. Logo, depois que o sábio dobrou a quantidade de moedas do camponês pela terceira vez, o camponês ficou com

$$2(4y-7x)=8x-14y \text{ moedas.}$$

□

Exemplo 6 (OBM). *Figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos quadrados devem ser colocados no prato da direita da última balança para que ela fique em equilíbrio?*



Solução. Uma vez que formas iguais representam objetos de mesma massa, vamos denotar por t a massa de cada triângulo, por c a massa de cada círculo e por q a massa de cada quadrado. Observando a primeira balança, concluímos que

$$3t+c=6q$$

e, observando a segunda balança, concluímos que

$$2t + 4c = 8q.$$

Daí, multiplicando por 2 os dois membros da primeira das equações acima e multiplicando por 3 os dois membros da segunda, obtemos

$$6t + 2c = 12q$$

e

$$6t + 12c = 24q.$$

Desse modo, subtraindo a primeira equação da segunda membro a membro, obtemos

$$\cancel{6t} + 12c - \cancel{6t} - 2c = 24q - 12q \iff 10c = 12q.$$

Portanto, a massa de 10 círculos é igual à massa de 12 quadrados. Assim, a massa de um círculo é igual a $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ da massa de um quadrado, ou seja, $c = \frac{6q}{5}$. Agora, substituindo esse valor de c na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} 3t + \frac{6q}{5} = 6q &\iff 3t = 6q - \frac{6q}{5} \\ &\iff 3t = \frac{24q}{5} \\ &\iff t = \frac{8q}{5}. \end{aligned}$$

Agora, queremos encontrar a que quantidade de quadrados corresponde a soma das massas de 4 triângulos e 3 círculos.

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{8q}{5} + 3 \cdot \frac{6q}{5} &= \frac{32q}{5} + \frac{18q}{5} \\ &= \frac{50q}{5} \\ &= 10q. \end{aligned}$$

Concluímos que a soma das massas de 4 triângulos com as massas de 3 círculos é igual à soma das massas de 10 quadrados. □

Exemplo 7.

(a) *Prove a identidade algébrica* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(b) *Calcule o valor da expressão numérica abaixo:*

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

(c) *Encontre dois números inteiros cujo produto seja igual a* 999991.

Solução.

(a) Temos que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2.$$

(b) Utilizando várias vezes a identidade algébrica provada no item (a), obtemos

$$\begin{aligned} 100^2 - 99^2 &= (100+99)(100-99) = (100+99)\cdot 1 = 100+99, \\ 98^2 - 97^2 &= (98+97)(98-97) = (98+97)\cdot 1 = 98+97, \\ &\vdots \\ 4^2 - 3^2 &= (4+3)(4-3) = (4+3)\cdot 1 = 4+3, \\ 2^2 - 1^2 &= (2+1)(2-1) = (2+1)\cdot 1 = 2+1. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} & 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\ = & 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ = & (100+1)\cdot 50 \\ = & 101 \cdot 50 \\ = & 5050. \end{aligned}$$

(c) Veja que $999991 = 1000000 - 9$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 999991 &= 1000000 - 9 \\ &= 1000^2 - 3^2 \\ &= (1000+3)(1000-3) \\ &= 1003 \cdot 997. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 8. *Um feirante tinha uma cesta de ovos para vender e atendeu sucessivamente a três fregueses. Cada freguês, em sua vez, levou a metade dos ovos existentes na cesta e mais meio ovo. Se o feirante não precisou quebrar nenhum ovo e sobraram 10 ovos na cesta, quantos ovos havia inicialmente?*

Solução. Vamos denotar por x a quantidade de ovos que havia inicialmente na cesta. O primeiro freguês levou a metade dos ovos mais meio ovo, ou seja, $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. Desse modo, a quantidade de ovos que restou é $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. O segundo freguês levou a metade do que tinha mais meio ovo, ou seja, $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$. Assim, restaram $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ ovos. Finalmente, o terceiro freguês levou a metade do que havia mais meio ovo, ou seja, $\frac{x}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$. Portanto, depois que o terceiro freguês retirou os seus ovos, restaram na cesta $\frac{x}{8}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$. Essa última quantidade corresponde a 10 ovos. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{x}{8}-\frac{7}{8}=10 &\iff \frac{x}{8}=10+\frac{7}{8}\\ &\iff \frac{x}{8}=\frac{87}{8}\\ &\iff x=87.\end{aligned}$$

Concluímos que inicialmente havia 87 ovos na cesta. $\square$

Exemplo 9. *Para qualquer real positivo x, dizemos que os números $\frac{x}{x+1}$ e $x+1$ são filhos de x — logo, esses números são irmãos e x é pai dos dois.*

(*a*) *Encontre o pai de $\frac{5}{7}$.*

(*b*) *Encontre o irmão de $\frac{5}{7}$.*

Solução.

(a) Se $x>0$ é o pai de $\frac{5}{7}$, então $\frac{5}{7}=x+1$ ou $\frac{x}{x+1}=\frac{5}{7}$. Mas se $\frac{5}{7}=x+1$, então $x=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}<0$, o que não pode acontecer. Logo, deve ser $\frac{x}{x+1} = \frac{5}{7}$. Encontrando o valor de x:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} = \frac{5}{7} &\iff 7x = 5(x+1)\\ &\iff 7x = 5x + 5\\ &\iff 2x = 5\\ &\iff x = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $\frac{5}{2}$ é o pai de $\frac{5}{7}$.

(b) O irmão de $\frac{5}{7}$ é o outro filho de $\frac{5}{2}$, que é $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. É importante que os alunos entendam que podemos fazer operações aritméticas com as letras que são utilizadas para representar números reais desconhecidos e que essas operações (com letras) gozam das mesmas propriedades que já conhecemos.