Material Teórico - Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Equações de Primeiro Grau a uma Variável

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

15 de setembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste módulo, apresentaremos um método para resolver situações-problema nas quais o objetivo é descobrir algum valor incógnito que possui certas propriedades. Antes de partirmos para os conceitos que iremos desenvolver ao longo da aula, iniciamos nossa apresentação com alguns exemplos.

Exemplo 1. *No sítio do tio Barnabé há apenas dois tipos de animais: cabras e galinhas, em um total de* 40 *animais. Ao contar o número de patas que possuem seus animais, tio Barnabé contou um total de* 130 *patas. Quantos de seus animais eram galinhas?*

Exemplos como este são conhecidos como "*problemas com texto*", pois apresentam uma parte relevante das informações (hipóteses) escritas em texto ao invés de apresentá-las diretamente utilizando notações matemáticas.

Para resolver esses tipos de exercícios, os alunos devem possuir a capacidade de ler e interpretar textos, além da habilidade de realizar operações matemáticas corretamente.

Tratam-se, portanto, de problemas complexos que necessitam de uma *estratégia* para chegar à solução. Recomendamos a utilização dos seguintes passos:

1. Leia o enunciado cuidadosamente. Se possível, destaque todas as informações relevantes.

2. Se o problema tiver muitas informações, tente organizá-las em uma tabela.

3. Represente os valores desconhecidos por letras.

4. Traduza as informações dadas no problema em equações.

5. Resolva as equações, encontrando os valores desconhecidos.

6. Teste se os valores encontrados realmente satisfazem as condições do enunciado.

Além dos passos acima, para resolver problemas com texto pode ser interessante ler a pergunta *antes* de ler as informações. Na maioria dos casos, a pergunta estará no fim do enunciado.

Vejamos como tudo isso funciona na prática resolvendo o **Exemplo 1.**

Solução do Exemplo 1. Em primeiro lugar, vamos destacar todas as informações importantes do enunciado:

> "No sítio do tio Barnabé há apenas dois tipos de animais: cabras e galinhas, em um total de 40 animais. Ao contar o número de patas que possuem seus animais, tio Barnabé contou um total de 130 patas. **Quantos de seus animais eram galinhas?**"

O próximo passo é organizar as informações em partes. Separe uma parte para os valores conhecidos, outra para os valores desconhecidos e uma terceira para o valor procurado.

Valores conhecidos:
- Total de animais: 40.
- Total de patas: 130.

Valores desconhecidos:
- Quantidade de galinhas.
- Quantidade de cabras.

Pergunta:
Quantidade de galinhas.

Agora, representaremos os valores desconhecidos por letras. Denotando por x o número de galinhas, a informação dada sobre o total de animais garante que o número de cabras será $40 - x$.

Nesse ponto, devemos formular uma equação a partir das informações. Para tal, veja que a quantidade de patas pode ser escrita em termos dos números de galinhas e de cabras. De fato, como cada galinha tem duas patas e cada cabra tem quatro patas, o total de patas é $2x + 4(40 - x)$.

Assim, obtemos a equação

$$2x + 4(40 - x) = 130.$$

Para resolvê-la, aplicamos a propriedade distributiva à segunda parcela do primeiro membro, obtendo

$$2x + 160 - 4x = 130.$$

Em seguida, balanceando a última equação acima, ficamos com a igualdade

$$30 = 2x,$$

a partir da qual obtemos $x = 15$ e $40 - x = 40 - 15 = 25$. Portanto, há 15 galinhas e 25 cabras.

Por fim, vamos testar se a solução obtida está de acordo com o enunciado. Veja que as 15 galinhas possuem, juntas, $2 \times 15 = 30$ patas e as 35 cabras possuem, também juntas, $4 \times 25 = 100$ patas. Como $100 + 30 = 130$, o resultado é verificado. □

Façamos mais uma questão empregando o mesmo método:

Exemplo 2. *Camila tem* 30 *moedas em seu bolso, todas as quais são de* 25 *centavos ou de* 10 *centavos. Sabe-se que a quantidade de moedas de* 25 *centavos é igual ao dobro da quantidade de moedas de* 10 *centavos. Quantos reais Camila possui em seu bolso?*

Solução. Novamente, vamos destacar todas as informações importantes:

"Camila tem 30 moedas em seu bolso. Todas são de 25 centavos ou de 10 centavos. Sabe-se que a quantidade de moedas de 25 centavos é igual ao dobro da quantidade de moedas de 10 centavos.
Quantos reais Camila possui em seu bolso?"

O próximo passo é organizar as informações destacadas acima, o que fazemos a seguir.

Valores conhecidos:
Total de moedas: 30.

Valores desconhecidos:
- Quantidade de moedas de 10 centavos.
- Quantidade de moedas de 25 centavos.
- Total que Camila possui, em reais.

Pergunta:
Total em reais.

Agora, representaremos os valores desconhecidos por letras. Uma primeira tentativa seria chamar o *total em reais* de x e achar uma equação utilizando essa incógnita. Trata-se de uma tentativa natural, uma vez que o total em reais é o valor que desejamos descobrir. Por outro lado, podemos perceber que, nessa tentativa, é muito difícil formular uma equação a partir do texto.

Uma segunda tentativa é representar a quantidade de moedas de de 10 centavos por x. Essa tentativa parece mais promissora, uma vez que, pelo enunciado, é simples calcular (em termos de x) a quantidade de moedas de 25 centavos: sendo o dobro da quantidade de moedas de 10 centavos, ela será igual a $2x$.

Nesse ponto, para resolver a situação-problema, temos de formular uma equação a partir das informações dadas. Podemos fazê-lo observando que a quantidade total de moedas é igual à soma das quantidades de moedas de 10 centavos e 25 centavos. Assim,

$$x + 2x = 30,$$

ou seja, $3x = 30$. Resolvendo essa equação, encontramos $x = 10$. Portanto, Camila tem 10 moedas de 10 centavos e $2 \cdot 10 = 20$ moedas de 25 centavos.

Veja que descobrir o valor de x não finaliza a solução do exercício, pois estamos buscando o valor total que Camila possui. Para obter esse resultado, basta calcular:

$$10 \times 0,10 + 20 \times 0,25 = 1,00 + 5,00 = 6,00.$$

Assim, Camila tem R$6,00. □

Agora que o método já foi tratado de maneira detalhada, resolveremos mais um último exemplo, desta vez sem apresentar tantos detalhes.

Exemplo 3. *Joaquim falou que seu irmão tem cinco bolinhas de gude a mais do que ele, e que os dois juntos possuem 30 bolinhas de gude. Explique porque Joaquim deve ter cometido algum erro.*

Solução. Seja x a quantidade de bolinhas de gude que Joaquim possui. Nesse caso, seu irmão terá $x+5$ bolinhas.

Se, em conjunto, os irmãos possuem 30 bolinhas, podemos montar a seguinte equação:

$$x + (x + 5) = 30.$$

Resolvendo-a, temos:

$$2x + 5 = 30$$

$$2x = 25$$

$$x = 12,5.$$

Note que a letra x representa a quantidade de bolinhas de gude que Joaquim possui. Essa quantidade deve ser um número inteiro, mas $12,5$ não é inteiro. Portanto, é impossível que todos os fatos descritos por Joaquim estejam corretos. □

Sempre que construímos uma equação para resolver determinado problema, o valor da incógnita deve pertencer a algum conjunto específico, que chamamos de **conjunto-universo** do problema. No exemplo anterior, o conjunto-universo da incógnita x é o conjunto dos números inteiros não-negativos ($\mathbb{Z}_+$), pois x representa um quantidade de objetos. Portanto, ao resolvermos uma equação, devemos sempre verificar se as soluções encontradas pertencem ou não ao conjunto-universo.

Podemos representar a relação entre o conjunto-solução S de uma equação e o conjunto universo U da incógnita utilizando um *diagrama de Venn*.

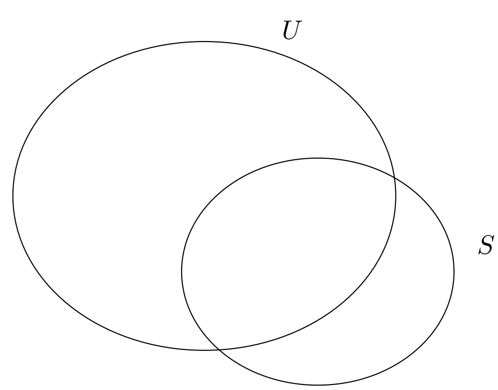

Figura 1: a interseção entre os conjuntos S e U é chamada de **conjunto-verdade**, e representa todos os valores do conjunto-universo que *resolvem* a equação.

Finalizamos este material resolvendo algumas equações que já se encontram em notação algébrica. Nosso objetivo é exercitar as operações básicas com números e o método de soluções de equações pela utilização de operações idênticas e simultâneas nos dois membros da equação.

Exemplo 4. *Resolva as equações a seguir:*

(a) $5x + 3 = 18$.

(b) $2(x + 1) + 4 = 3(x + 4) - 7$.

(c) $1 - \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$.

Solução.
(a)

$$\begin{aligned} 5x + 3 = 18 &\Rightarrow 5x + 3 - 3 = 18 - 3 \\ &\Rightarrow 5x = 15 \\ &\Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{15}{5} \\ &\Rightarrow x = 3. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &2(x + 1) + 4 = 3(x + 4) - 7 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x + 2 + 4 = 3x + 12 - 7 \\ &\Rightarrow 2x + 6 = 3x + 5 \\ &\Rightarrow 2x + 6 - 5 = 3x \\ &\Rightarrow 2x - 1 = 3x \\ &\Rightarrow -1 = 3x - 2x \\ &\Rightarrow -1 = x. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{5} = \frac{1}{2} &\Rightarrow 5\left(1 - \frac{x}{5}\right) = \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 5 - x = \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 5 - \frac{5}{2} = x \\ &\Rightarrow \frac{5}{2} = x. \end{aligned}$$

□

2 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar este material. Na primeira metade do encontro, resolva os três primeiros exercícios apresentados nesse material. Construa a aula em torno da capacidade do aluno ser capaz de destacar as informações mais relevantes de cada enunciado e reformular a situação-problema em uma equação. Dedique o segundo encontro à utilização de métodos algébricos na solução das equações. Nesse primeiro contato, é importante que os alunos fixem bem a ideia de poder fazer qualquer operação básica nos dois lados da equação, ao invés de tentarem decorar regras prontas como "passar para o outro lado subtraindo/dividindo".

É bem conhecido que muitos alunos têm grande dificuldade em simplificar corretamente expressões algébricas envolvendo incógnitas. Um método chamado *grade algébrica*, desenvolvido por Dave Hewitt, facilita a manipulação algébrica dessas expressões através de um aplicativo (que, apesar de ser pago, pode ser facilmente reproduzido no quadro). No endereço `https://goo.gl/cxe7zt`, é possível encontrar um vídeo (em Inglês) explicando como utilizar a grade algérica no processo de aprendizagem. O artigo [1] traz mais informações sobre como aplicar o método em sala de aula.

Ao final da aula, solicite aos alunos que comentem sobre situações reais nas quais eles se depararam/poderiam se deparar com aplicações dos assuntos abordados neste material. Se possível, elabore exercícios que simulem as situações apresentadas pelos alunos.

Referências

[1] Dave Hewitt. Designing educational software: The case of grid algebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(2):167–198, Sep 2016.