Material Teórico - Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Exercícios sobre Equações

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

14 de outubro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Chegou o momento de praticarmos as estratégias que aprendemos no módulo anterior resolvendo uma série de exercícios relacionados a equações. Recomendamos que o leitor pense nos problemas por alguns minutos antes de olhar suas soluções.

Exemplo 1. *Henrique e Mariana estão usando uma balança de farmácia com ponteiro para pesar suas mochilas. Quando pesadas separadamente, a balança mostra* 3kg *e* 2kg*. Quando são pesadas juntas, a balança mostra* 6kg*.*

— Isso não pode estar certo! - disse Mariana. Dois mais três não é igual a seis.

Então, Henrique tira as duas mochilas e fala:

— Veja! O ponteiro da balança não está no zero! Ela está com defeito!

Quanto as mochilas pesavam de fato?

Solução. Essa situação ocorreu pois a balança marca um peso de x quilos quando não há nada sobre ela (ao invés de marcar 0 quilos, como deve-se esperar de uma balança funcionando corretamente). Assim, o valor correto para o peso de cada mochila em separado deve ser $2-x$ e $3-x$, respectivamente. Por outro lado, ao serem pesadas juntas, o valor correto que a balança deve marcar é $(2-x)+(3-x) = 5-2x$. Porém, ela sempre acrescenta um valor x ao que está sendo pesado, de forma que temos a seguinte equação

$$(5-2x)+x = 6.$$

Resolvendo essa equação, encontramos $x = -1$. Portanto, a balança sempre retira 1 quilo do peso real do que está sendo pesado. Assim, as mochilas pesam 3kg e 4kg. □

Exemplo 2 (ENEM 2009). *Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Ao final, verificou-se que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?*

a) R$ 14,00.

b) R$ 17,00.

c) R$ 22,00.

d) R$ 32,00.

e) R$ 57,00.

Solução. A melhor maneira de iniciarmos a solução desse problema é construindo uma tabela na qual iremos organizar as informações apresentadas no enunciado. Faremos isso criando duas linhas, a primeira referente à situação com 50 pessoas e a segunda referente à situação com 55 pessoas:

Pessoas	Cotas	Arrecadado	Valor que falta
50	x	$50x$	510
55	$x+7$	$55(x+7)$	0

Agora, perceba que a diferença entre o total arrecadado nas duas diferentes situações é 510. Assim, podemos montar a seguinte equação:

$$50x + 510 = 55(x+7).$$

Resolvendo-a, obtemos

$$510 = 5x + 385 \Rightarrow 5x = 125 \Rightarrow x = 25.$$

Assim, o valor final da cota foi de $25+7 = 32$. □

Exemplo 3 (OBM). *Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, qual é o valor de x?*

1	14	x
26		13

Solução. Vamos chamar de y o número que está na casa superior direita. Dessa forma, a diagonal que possui essa casa tem soma $26+14+y$, que deve ser o mesmo valor da soma da última coluna, que é $y+x+13$. Igualando as duas temos

$$y + x + 13 = 26 + 14 + y \Leftrightarrow x = 27.$$

□

Exemplo 4 (OBM). *Com o dinheiro que Carlinhos tinha, poderia ter comprado* 600 *gramas de queijo ou* 400 *gramas de presunto. Usando esse dinheiro, ele resolveu comprar quantidades iguais de presunto e queijo. Quantos gramas de cada item ele comprou?*

Solução. Supondo que Carlinhos tem Q reais, concluímos que o preço do grama de queijo é $\frac{Q}{600}$ e o preço do grama de presunto é $\frac{Q}{400}$. Seja m a quantidade, em gramas, de queijo e de presunto que Carlinhos comprou. Dessa forma, obtemos a equação

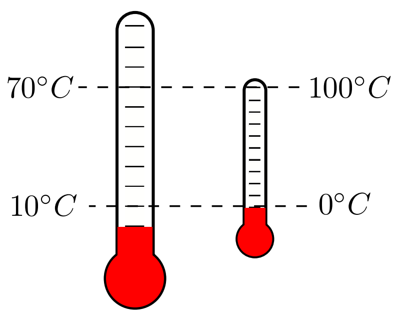
$$m \cdot \frac{Q}{600} + m \cdot \frac{Q}{400} = Q,$$

a qual equivale a

$$m\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{400}\right) = 1.$$

Resolvendo a equação, obtemos $m = 240$. Portanto, Carlinhos comprou 240 gramas de cada item. $\square$

Exemplo 5. *Dois termômetros de mercúrio, de tamanhos distintos, estão suspensos em uma parede. Apesar de marcarem a mesma temperatura, as alturas de suas marcações não são as mesmas. A marcação de* 10°C *do termômetro da esquerda corresponde à marcação de* 0°C *no termômetro da direita, enquanto que a marcação de* 70°C *do termômetro da esquerda corresponde à marcação de* 100°C *no termômetro da direita.*



Em que temperatura as alturas do mercúrio nos dois termômetros serão as mesmas?

Solução. Seja x a temperatura na qual os dois termômetros terão suas marcações na mesma altura. Veja que nessa temperatura, a razão entre as distância de x até zero e de 100 até x no segundo termômetros será igual à razão entre as distâncias de x até 10 e de 70 até x no primeiro termômetro. Assim,

$$\frac{x-0}{100-x} = \frac{x-10}{70-x}.$$

Multiplicando em cruz, temos:

$$70x - x^2 = 100x - x^2 - 1000 + 10x.$$

Cancelando o termo x^2 que aparece dos dois lados da equação e reorganizando os termos restantes, temos:

$$1000 = 40x \Rightarrow x = 25.$$

Logo, em 25°C as alturas dos marcadores nos dois termômetros serão as mesmas. $\square$

Exemplo 6. *Complete a tabela abaixo de modo que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:*

			15				13					

(i) a soma dos números escritos em quaisquer três casas consecutivas seja sempre a mesma;

(ii) a soma total dos números escritos nas casas seja 171.

Solução. Em primeiro lugar, perceba que o primeiro número do tabuleiro deve ser 15. De fato, chamando de a, b e c os números que ocupam as três primeiras casas do tabuleiro, nessa ordem, temos que

$$a + b + c = b + c + 15 \Rightarrow a = 15.$$

Com um raciocínio análogo, podemos concluir que os números se repetem a cada três casas. Assim, podemos completar parcialmente a tabela a partir das casas que contém os números 15 e 13, utilizando a letra x para identificar o valor ainda não conhecido. Dessa forma, temos:

15	13	x	15	13	x	15	13	x	15	13	x	15

Agora, utilizamos a propriedade *(ii)* do enunciado para construir a equação

$$5 \cdot 15 + 4 \cdot 13 + 4x = 171.$$

Resolvendo-a, obtemos $x = 11$. Sabendo o valor x, podemos completar facilmente a tabela. $\square$

Exemplo 7. *Um tanque contém uma solução líquida de* 10 *litros, composta de* 60% *de ácido e* 40% *de água pura. Quantos litros de água devemos adicionar a esta solução de modo que a porcentagem de ácido na solução diminua para* 20%*?*

Solução. Inicialmente, temos 6 litros de ácido e 4 litros de água pura. Supondo que adicionemos x litros de água à solução, façamos uma tabela para organizar as informações:

	Antes	Depois
Água	4	$4 + x$
Ácido	6	6
Total	10	$10 + x$

Após a adição dos x litros de água, os seis litros de ácido deverão corresponder a 20% do total da solução, que agora possui $10 + x$ litros. Assim, podemos formular a seguinte equação:

$$6 = \frac{20}{100}(10 + x).$$

Simplificando o segundo membro, ficamos com

$$6 = 2 + \frac{x}{5},$$

de sorte que $\frac{x}{5} = 4$ e, assim, $x = 20$.

Portanto, devemos adicionar 20 litros de água. □

Exemplo 8. *Os oito times de futebol amador de Bruzundanga disputaram um campeonato no qual cada time jogou uma única vez com cada um dos demais times. No futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e o time derrotado não pontua. Nesse campeonato, três times ficaram em primeiro lugar com 17 pontos cada, enquanto os outros cinco ficaram em segundo lugar com N pontos cada. Sabendo que houve 13 empates durante todo o campeonato, qual é o valor de N?*

Solução. Como temos oito times, cada um jogará sete partidas. Porém, como cada partida é disputada por dois times, tivemos um total de $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ partidas. Assim, se houve 13 empates, houve $28 - 13 = 15$ jogos que não terminaram empatados. Cada jogo que termina empatado distribui 2 pontos entre os times, ao passo que cada jogo que não termina empatado distribui 3 pontos. Assim, o total de pontos distribuídos foi de

$$15 \cdot 3 + 13 \cdot 2 = 71.$$

Por outro lado, o total de pontos distribuídos deve ser igual à soma das pontuações finais dos oito times. Então, pelo enunciado, montamos nossa equação:

$$17 \cdot 3 + 5 \cdot N = 71.$$

Resolvendo-a, obtemos $5N = 20$ e, daí, $N = 4$. □

O próximo e último exemplo não versa sobre equações de primeiro grau. Entretanto, é instrutivo que o apresentemos, a fim de que o leitor desmistifique o trato com equações mais complicadas.

Exemplo 9. *No planeta POT o número de horas por dia é igual ao número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?*

Solução. Seja x o número de horas em um dia. Assim, como também temos x dias em uma semana, teremos $x \cdot x = x^2$ horas em uma semana. Pelo mesmo raciocínio, teremos x^3 horas em um mês e x^4 horas em um ano. Logo,

$$x^4 = 4096 = 8^4,$$

o que nos dá $x = 8$. Portanto, há 8 semanas em um mês. □

2 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar este material.

Como você deve ter percebido, os problemas desse material são mais desafiadores do que os problemas introdutórios sobre equações. Dessa forma, o ideal é dar um tempo para que os alunos possam refletir sobre as questões. Separe-os em grupos de dois ou três estudantes e entregue uma lista (sem as respostas, é claro) para cada grupo. À medida que alguns alunos forem resolvendo os exercícios, oriente-os a exporem suas soluções no quadro. Deixe claro para a turma que as equações podem ser entendidas como ferramentas que são empregadas para auxiliar o desenvolvimento de um raciocínio.

Créditos pelas figuras:
`pt.vecteezy.com`