Material Teórico - Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Inequações

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

08 de dezembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nas aulas anteriores apresentamos o conceito de equação, que consistia na **igualdade** entre duas expressões envolvendo incógnitas. Neste material, trataremos situações nas quais queremos analisar circunstâncias em que duas expressões são comparadas através de uma **desigualdade**; portanto, ao invés de haver um “equilíbrio” entre as expressões, haverá um “desequilíbrio”. Deixaremos esse conceito mais claro através dos seguintes exemplos comparativos:

I. João é cinco anos mais velho do que Pedro.

II. João é pelo menos cinco anos mais velho do que Pedro.

Observe que as duas sentenças, apesar de muito parecidas, possuem significados distintos. Enquanto a primeira tem um sentido de *igualdade*, a segunda transmite uma noção de *desigualdade*. Mais precisamente, se J é a idade de João e P é a idade de Pedro, a primeira sentença pode ser escrita matematicamente como

$$J = P + 5.$$

Por outro lado, a segunda sentença pode ser escrita da seguinte forma:

$$J \geq P + 5.$$

Note que o símbolo utilizado ($\geq$) na segunda expressão matemática é diferente do símbolo de igualdade ($=$) e, por conseguinte, tem representa uma situação distinta. De fato, $J \geq P + 5$ significa que o valor de J é **maior do que ou igual ao** valor de $P + 5$. Ao longo desta aula, utilizaremos os símbolos ($>, \geq, <, \leq$) para representar desigualdades. Seus respectivos significados são descritos a seguir:

I) $a > b$ significa “a é maior do que b”.

II) $a \geq b$ significa “a é maior do que ou igual a b”.

III) $a < b$ significa “a é menor do que b”.

IV) $a \leq b$ significa “a é menor do que ou igual a b”.

Além disso, também é importante compreender que certas desigualdades simples podem ser entendidas como intervalos na reta dos números reais. Por exemplo, o conjunto dos números reais a tais que $a \geq 5$ é visualmente representado como:

Por outro lado, o conjunto dos números reais a *estritamente* maiores do que 5, ou seja, todos os números reais a tais que $a > 5$, é representado como:

Recorde que resolver uma equação na incógnita x era o mesmo que encontrar todos os valores reais de x que tornassem verdadeira uma igualdade de expressões (envolvendo x). Da mesma forma, resolver uma inequação na incógnita x é o mesmo que encontrar todos os valores reais de x que tornem verdadeira uma *desigualdade* de expressões (envolvendo x).

A seguir, resolveremos alguns exercícios simples envolvendo desigualdades e inequações, a fim de familizarizar o leitor com os argumentos tipicamente envolvidos.

Exemplo 1 (ENEM 2010). *Um motorista de um carro flex (bicombustível) calcula que, abastecido com 45 litros de gasolina ou com 60 litros de etanol, o carro percorre a mesma distância. Chamando de x o valor do litro de gasolina e de y o valor do litro de etanol, a situação em que abastecer com gasolina é economicamente mais vantajosa do que abastecer com etanol é expressa por:*

a) $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

c) $\frac{x}{y} > \frac{4}{3}$.

d) $\frac{x}{y} > \frac{3}{4}$.

e) $\frac{x}{y} < \frac{4}{3}$.

Solução. Em primeiro lugar, observe que todos os itens tratam sobre a fração $\frac{x}{y}$. Esse valor representa a razão entre o valor do litro de gasolina pelo valor do litro de etanol. Quanto menor for este valor, mais barata a gasolina estará em relação ao etanol (em termos relativos).

Agora seja p o preço da gasolina e q o preço do etanol quando os dois combustíveis são equivalentes, i.e., quando o gasto total para se percorrer a mesma distância for o mesmo. De acordo com o enunciado, matematicamente isso ocorre se

$$p \times 45 = q \times 60 \iff \frac{p}{q} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}.$$

Logo, sempre que $\frac{x}{y} < \frac{p}{q} = \frac{4}{3}$. será mais vantajoso abastecer com gasolina. A resposta correta é a letra e). □

Exemplo 2 (ACAFE 2015). *Uma pessoa compra um terreno de* 40 *metros de comprimento por* 20 *metros de largura. Ela deseja deseja construir uma casa e estabelece ao arquiteto contratado pelo projeto certas condições:*

I. a área destinada ao lazer deve ter 200m^2*;*

II. a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% *da área total do terreno;*

III. o custo da construção da casa deve ser menor que R\$450.000,00.

Se o metro quadrado construído custa R\$1.500,00*, a área interna da casa que o arquiteto irá projetar será:*

a) entre 300m^2 *e* 400m^2.

b) maior que 400m^2.

c) entre 200m^2 *e* 300m^2.

d) menor que 200m^2.

Solução. O terreno tem área igual a $40 \times 20 = 800\text{m}^2$. Agora, seja x (em m^2) a medida da área interna da casa a ser construída. Pelo item II, temos que

$$x + 200 \geq \frac{800}{2},$$

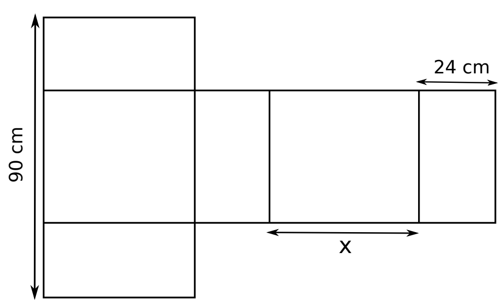
ou seja, $x \geq 200$. Pelo item III, temos que

$$1500x \leq 450.000 \Rightarrow x \leq 300.$$

Portanto, o item correto é c).

□

Exemplo 3 (ENEM 2014). *Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão; contudo, a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não poderá ser superior a 115 cm. A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.*



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela ANAC é:

a) 25.

b) 33.

c) 42.

d) 45.

e) 49.

Solução. Em primeiro lugar, devemos descobrir os valores das dimensões da caixa. Já conhecemos duas: 24cm e x. Por outro lado, visualizando a montagem da caixa mentalmente, percebemos que sua terceira dimensão é obtida a partir da seguinte subtração:

$$90 - 24 - 24 = 42.$$

Assim, pelas regras da ANAC, devemos ter

$$42 + 24 + x \leq 115$$

ou, ainda, $x \leq 49$. A resposta correta é e). □

O leitor deve ter percebido que, ao longo da solução dos exercícios anteriores utilizamos diversas propriedades das inequações de maneira intuitiva. Nosso próximo passo será entender de maneira um pouco mais formal as manipulações algébricas que podem ser feitas em desigualdades (resp. inequações).

Propriedade I. Sejam x e y números reais quaisquer. Então, $x > y$ se, e somente se, $x+z > y+z$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Em termos gerais, essa propriedade nos diz que, se um número x é maior do que um número y, então podemos somar ou subtrair qualquer quantidade dos dois lados da desigualdade $x > y$ sem que isso altere sua validade.

Até aqui, nada de novo em relação às manipulações permitidas em igualdades (resp. equações). Vejamos, contudo, as próximas duas propriedades.

Propriedade II. Sejam x e y números reais quaisquer. Então, $x > y$ se, e somente se, $x \cdot z > y \cdot z$ para todo real *positivo* z.

Ou seja, diferentemente do que ocorre nas igualdades (resp. equações), quando temos uma desigualdade (resp. inequação), podemos multiplicar (ou dividir) os dois lados da relação por um mesmo número real, *sem alterar o sentido da desigualdade* (resp. *inequação*) **apenas quando esse número for positivo**.

Justificar propriedades I e II de maneira rigorosa está além dos objetivos deste módulo. Porém, convidamos o leitor a realizar alguns testes de verificação dessas propriedades para números inteiros. Além disso, devemos salientar que as propriedades mencionadas também são verdadeiras para os demais tipos de desigualdades (resp. inequações) $(\geq, <, \leq)$.

Em resumo, podemos resolver inequações operando com ambos os membros de formas semelhantes às que utilizamos ao resolver equações. Porém, devemos ter o cuidado de, ao realizarmos multiplicações ou divisões, estar seguros de que estamos realizando essas operações com números positivos.

Por fim, apresentaremos alguns exemplos simples de manipulações algébricas de inequações.

Exemplo 4. *Resolva as seguintes inequações:*

a) $2x + 4 > 10$.

b) $-3x + 5 \geq 14$.

Solução.
(a) Vamos começar subtraindo 4 dos dois lados para obter

$$2x > 6.$$

Agora, veja que 2 é um número positivo; então, dividindo os dois membros por 2 (ou, o que é o mesmo, multiplicando-os por $\frac{1}{2}$), obtemos

$$x > 3.$$

(b) Podemos começar subtraindo 5 de ambos os lados para chegar a $-3x \geq 9$. Agora veja que -3 é negativo. Isso significa que não podemos dividir os dois lados por -3 sem alterar a inequação. Então, somaremos $3x$ no dois lados, ficando com

$$0 \geq 9 + 3x.$$

Em seguida, subtraindo 9 dos dois lados, teremos

$$-9 \geq 3x.$$

Por fim, dividindo por 3, chegamos a

$$-3 \geq x.$$

□

No item (b) do exemplo anterior, fizemos diversas manipulações para evitar a divisão por um número negativo (-3, no caso). Para evitar contas em demasia, podemos utilizar um "atalho algébrico" que, em verdade, é uma terceira propriedade importante de manipulação de desigualdades (resp. inequações):

Propriedade III. Sejam x, y números reais. Então, $x > y$ se, e somente se, $x \cdot z < y \cdot z$ para todo real *negativo* z.

Em palavras, ao multiplicarmos ou dividirmos uma desigualdade (resp. inequação) por um número negativo, devemos *alterar o sentido da desigualdade*. Por exemplo, voltando para o item (b) do exemplo anterior, poderíamos tê-lo resolvido fazendo simplesmente:

$$-3x \geq 9 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{9}{-3} \Leftrightarrow x \leq -3.$$

2 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar este material. Durante o primeiro tempo, concentre-se em questões que envolvem a "tradução" de situações que envolvem inequações para a simbologia matemática. Idealmente, dê tempo para seus alunos lerem e interpretarem os textos. Se possível, entregue os exercícios em uma lista ou escreva-os no quadro. Utilize este primeiro momento também para identificar problemas de leitura dos alunos. Em seguida, apresente os conceitos de intervalos e propriedades básicas das inequações. Por fim, resolva diversos exemplos simples para que os alunos entendam bem os novos conceitos.