Módulo de Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

Exercícios de Sistemas de Equações

7° ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Plano Cartesiano e Sistemas de Equações
Exercícios de Sistemas de Equações

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um estudante em férias observou que durante d dias:

- choveu 7 vezes, de manhã ou de tarde;
- houve 5 manhãs sem chuva; e
- houve 6 tardes sem chuva.

Sendo assim, qual o valor de d?

Exercício 2. Pneus novos, quando usados nas rodas dianteiras, duram 40000 km e, quando usados nas rodas traseiras, duram 60000 km. Com um jogo de 5 pneus novos, e fazendo um rodízio[1] adequado entre eles, qual o número máximo de quilômetros que um carro pode percorrer com esses quatro pneus?

Exercício 3. Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que eu tenho, juntos teremos 135 anos. Qual é a minha idade?

Exercício 4. Duas velas de igual comprimento são acesas simultaneamente. A primeira queima completamente em 4 horas e a segunda, em 3 horas. Depois de acesas, em quanto tempo uma delas terá o dobro do comprimento da outra?

Exercício 5. Um garoto brinca na escada rolante que conecta o primeiro com o segundo piso de uma loja. Quando sobe caminhando, ele conta dez degraus e demora 20 segundos para chegar ao topo. Quando desce correndo, conta cinquenta degraus e demora 30 segundos para chegar ao pé da escada. Quantos são os degraus visíveis da escada rolante?

Exercício 6. Ao final da participação de José e Maria em uma corrida, verificou-se que

i) José terminou no 17° lugar, à frente do triplo de atletas que ficaram à frente de Maria;

ii) Maria ficou à frente de $2,5$ vezes o número de atletas que ficaram à frente de José.

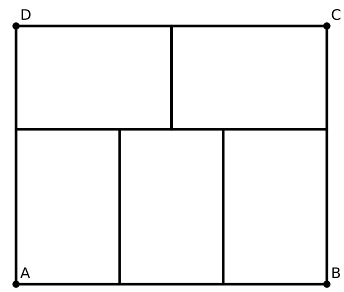
Qual o número de atletas que participaram dessa competição?

[1]O rodízio de pneus consiste na troca do par de pneus que estão no eixo da frente do carro com o par que está no eixo de trás. Ele acontece, pois os pneus do carro não se desgastam uniformemente, em função do maior esforço necessário às rodas dianteiras provocados pelo sistema de direção e também de tração, que é dianteira na grande maioria dos automóveis. Então, em determinado ponto, troca-se os componentes de eixo, para equilibrar a vida útil.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Um ciclista viaja de A até B, em média, a 80 km/h e retorna pelo mesmo caminho, em média, a 70 km/h. A viagem foi feita de forma contínua e durou um total de 6 horas. Qual a distância de A até B?

Exercício 8. O retângulo $ABCD$ está dividido em cinco retângulos iguais. Se o perímetro de $ABCD$ é 20cm, determine a sua área.



Exercício 9. Daqui a 8 anos, a soma de nossas idades será 46 anos, mas há m anos a diferença de nossas idades era de 4 anos. Há quantos anos a idade de um de nós era o tripo da idade da outro?

Exercício 10. Um lojista tem 40 barras de chocolate, cada uma das quais pesa 2, 3 ou 4 gramas. O peso total das barras é 160 gramas. Quais das barras o lojista tem mais: barras de 2 ou 4 gramas?

Exercício 11. Encontre todas as soluções, no conjunto dos números reais positivos, do sistema de equações:

$$\begin{cases} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28. \end{cases}$$

Exercício 12. Pedro tem 111 fichas azuis e 88 fichas brancas. Existe uma máquina que faz dois tipos de operações: uma é trocar 14 fichas azuis por 11 fichas brancas e a outra é trocar 7 fichas brancas por 13 azuis. Determine se Pedro pode conseguir, mediante sucessivas operações com a máquina, aumentar em 33 o número total de fichas, de modo que a quantidade de fichas azuis seja igual a $\frac{5}{3}$ da quantidade de fichas brancas. Se isto for possível, indique como fazê-lo. Se não é possível, explique o porquê.

Exercício 13. Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 quilômetros de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor em km/h?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

Exercício 15. Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

Exercício 16. No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

Exercício 17. Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que ele ganha 5 pontos ao acertar cada problema corretamente e perde 3 pontos caso não resolva o problema. No final, o aluno tinha 8 pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

Exercício 18. Trabalhando juntos Alvo e Ivo, pintam uma casa em três dias; Ivo e Eva pintam a mesma casa em quatro dias; Alvo e Eva em seis dias. Se os três trabalharem juntos, em quantos dias pintarão a casa?

Exercício 19. Se Xiluva coloca duas laranjas em cada cesta, sobram quatro laranjas. Se ela coloca cinco laranjas em cada cesta, uma cesta fica vazia. Quantas laranjas e cestas tem Xiluva?

Respostas e Soluções.

1. Podemos denotar

i) por x o número de dias de chuva pela manhã e pela tarde,

ii) por y o número de dias de chuva apenas pela manhã,

iii) por z o número de dias de chuva apenas pela tarde e

iv) por w o número de dias sem chuva.

Podemos escrever que

$$\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ z+w=5 \\ y+w=6. \end{cases}$$

Queremos calcular $d = x+y+w+z$, e para tal podemos somar todas as equações, obtendo $2x+2y+2w+2z = 18$. Daí, segue que $d = 9$.

2. Sendo x a quantidade (em milhares) de quilômetros que os pneus percorrem até o rodízio e y a quilometragem percorrida depois do mesmo até se gastarem totalmente. As frações para o consumo dos pneus ficam $\dfrac{x}{40}$ e $\dfrac{y}{60}$. Daí, podemos escrever que

$$\begin{cases} \dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{60}=1 \Rightarrow 3x+2y=120 \\ \dfrac{x}{60}+\dfrac{y}{40}=1 \Rightarrow 2x+3y=120. \end{cases}$$

E esse sistema tem como solução $x = 24$ e $y = 24$, e a soma fica 48 mil km.

3. De início, podemos ajustar uma tabela com os valores informados:

	passado	presente	futuro
eu	y	2x	135-2x
tu	x	y	2x

Observando que o tempo passa igualmente para todos, podemos escrever que

$$\begin{cases} 2x-y=y-x \\ (135-2x)-2x=2x-y, \end{cases}$$

donde $x = 30$, $y = 45$ e a minha idade no presente é $2x = 60$.

4. Sejam R a vela que se consome em 4 horas e S a que se consome em 3, podemos calcular as taxas de desgastes como $-\dfrac{H}{4}$ e $-\dfrac{H}{3}$, além disso, temos que ambas partem do tamanho H. E os tamanhos das velas no decorrer do tempo x podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \text{Vela } R &= -\frac{Hx}{4}+H \\ \text{Vela } S &= -\frac{Hx}{3}+H. \end{aligned}$$

Buscamos o $x = t$ tal que $R = 2h$ e $S = h$, para tal, formemos o sistema

$$\begin{cases} 2h &= H\left(-\dfrac{t}{4}+1\right) \\ h &= H\left(-\dfrac{t}{3}+1\right). \end{cases}$$

Ao dividirmos as duas fórmulas ficaremos com

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{-\frac{t}{4}+1}{-\frac{t}{3}+1} \\ 2\cdot\left(-\frac{t}{3}+1\right) &= -\frac{t}{4}+1 \\ \left(\frac{-2t+6}{3}\right) &= \frac{-t+4}{4} \\ -8t+24 &= -3t+12 \\ 5t &= 12 \\ t &= 2,4 \\ &= 2 \text{ horas e } 24 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

5. Sejam x e v, o comprimento e a velocidade da escada, respectivamente. Se garoto contou 10 degraus na subida, então ele deixou de andar $(x-10)$ degraus. Assim, podemos escrever

$$x-10 = v\cdot 20.$$

Além disso, quando contou 50 degraus na descida, ele andou $50-x$ degraus a mais. Daí, obtemos

$$50-x = v\cdot 30.$$

Resolvendo apenas o x neste sistema, temos $v = \dfrac{x-10}{20}$ e $v = \dfrac{50-x}{30}$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{x-10}{20} &= \frac{50-x}{30} \\ 3x-30 &= 100-2x \\ x &= 26. \end{aligned}$$

6. Sejam

- T, o total de atletas;
- M, a posição de chegada da atleta Maria; e
- J, a posição de chegada do atleta José = 17.

Com as informações do enunciado, podemos escrever que

$$T - J = 3(M-1) \Rightarrow T - 17 = 3(M-1)$$

e

$$T - M = 2,5(J-1) \Rightarrow T - M = 2,5(17-1).$$

A solução desse sistema tem T igual a 53.

7. Como velocidade média $= \dfrac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}}$, e sendo t o tempo de ida,temos que $6-t$ é o tempo de volta. Assim, podemos escrever

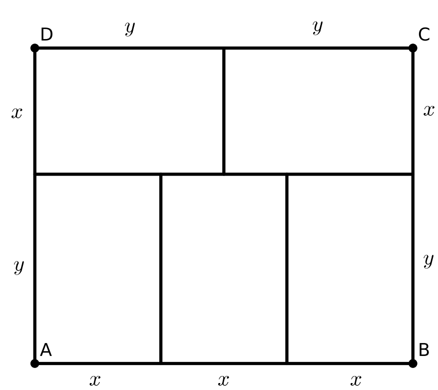
$$\begin{cases} 80 &= \dfrac{d}{t} \Rightarrow d = 80t \\ 70 &= \dfrac{d}{6-t} \Rightarrow d = 360 - 70t. \end{cases}$$

Daí, $80t = 420 - 70t$ e $t = \dfrac{420}{150} = \dfrac{14}{5}$, produzindo

$$d = 80 \cdot \frac{14}{5} = 224 \text{ km}.$$

8. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP $-$ 2015) Sejam x e y, com $x < y$, as dimensões de cada um dos retângulos menores. Assim, o perímetro do retângulo $ABCD$ é $5x + 4y = 20$cm. Além disso, comparando as dimensões dos lados dos retângulos menores, temos $3x = 2y$. Portanto, $20 = 5x + 6x$ e $x = 20/11$cm. Consequentemente, $y = \dfrac{3x}{2} = \dfrac{30}{11}$cm e

$$A_{ABCD} = 3x(x+y) = 3 \cdot \frac{20}{11} \cdot \frac{50}{11} = \frac{3000}{121}\text{cm}^2.$$



9. Suponha, sem perda de generalidade, que eu sou mais velho que você. Observe que a diferença de idades é constante, como há m anos a diferença era 4, hoje também será igual a quatro. Sendo, x a minha idade e y a sua, então $x - y = 4$. Podemos construir a tabela abaixo

	Presente	8 anos depois
eu	x	$x+8$
você	y	$y+8$

Assim, com os dados do enunciado, chegamos a

$$\begin{aligned} x + 8 + y + 8 &= 46 \\ x + y &= 30. \end{aligned}$$

Temos então $2x = 34$ e $x = 17$, fazendo $y = 13$. Buscando agora o valor de t anos que fez minha idade ser o triplo da sua.

	Passado	Presente
eu	$17-t$	17
você	$13-t$	13

Temos

$$\begin{aligned} 17 - t &= 3 \cdot (13 - t) \\ 17 - t &= 39 - 3t \\ 2t &= 22 \\ t &= 11. \end{aligned}$$

10. (Extraído da Olimpíada do Rio Grande do Norte $-$ 2015)

Sejam a a quantidade de barras de chocolate pesando 2 gramas, e b o número de barra de chocolates pesando 4 gramas. Logo, a quantidade de barras de chocolate pesando 3 gramas é igual a $40 - (a+b)$. Assim, o peso total das barras de chocolate é igual a

$$\begin{aligned} 2 \cdot a + 4 \cdot b + 3 \cdot [40 - (a+b)] &= 160 \\ 2 \cdot a + 4 \cdot b + 3 \cdot 40 - 3 \cdot a - 3 \cdot b &= 160 \\ b - a &= 40. \end{aligned}$$

Portanto, b= $40 + a$, o que implica que existem mais barras de chocolate pesando 4 gramas do que barras de chocolate pesando 2 gramas.

11. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP $-$ 2015) Somando as três equações, obtemos $(x+y+z)^2 = 81$, ou seja, $x + y + z = 9$, pois queremos soluções positivas. Substituindo tal valor em cada equação, temos: $x = 26/9$, $y = 27/9 = 3$ e $z = 28/9$. Assim, a única solução do sistema é $(x, y, z) = (27/9, 3, 28/9)$.

12. (Extraído da Olimpíada do Rio Grande do Norte − 2015)
Inicialmente, o número total de fichas é $111 + 88 = 199$. Aumentando esse número de 33, teremos ao todo $199 + 33 = 232$ fichas. Sejam A o número de fichas azuis e B o número de fichas brancas. Pelos dados do problema,

$$A = \frac{5}{3} \cdot B \text{ e } A + B = 232.$$

Assim, $\frac{5}{3} \cdot B + \frac{5}{3} \cdot B = 232$, donde $B = 87$ e então $A = 145$. Sejam m a quantidade de vezes que Pedro trocou 14 fichas azuis por 11 fichas brancas e n a quantidade de vezes que ele trocou 7 fichas brancas por 13 fichas azuis. Logo, temos que:

$$111 - 14m + 13n = 145 \text{ e } 88 + 11m - 7n = 87.$$

Assim, $-14m + 13n = 34$ e $7n - 11m = 1$, o que nos leva a concluir que $m = 5$ e $n = 8$. Portanto, Pedro deve trocar 5 vezes 14 fichas azuis por 11 fichas brancas e 8 vezes 7 fichas brancas por 13 azuis.

13. Sabemos que:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} \text{ e tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}.$$

Quando o homem nada no sentido da correnteza, a sua velocidade relativa deve ser somada com a do rio e, quando nada no sentido contrário ao da correnteza, a velocidade do rio deve ser subtraída de sua velocidade. Primeiramente, sejam c e v as velocidades da correnteza do rio e do homem e $d = 15$ a distância percorrida. O homem leva $\frac{15}{v+c}$ minutos, nadando a favor da correnteza e $\frac{15}{v-c}$ minutos, nadando contra a correnteza. Assim, os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{v+c} = \dfrac{15}{v-c} - 5 \\ \\ \dfrac{15}{2v+c} = \dfrac{15}{2v-c} - 1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(v^2 - c^2)$ e a segunda por $(4v^2 - c^2)$, obtemos

$$\begin{cases} 15(v-c) = 15(v+c) - 5(v^2 - c^2) \\ \\ 15(2v-c) = 15(2v+c) - (4v^2 - c^2) \end{cases}$$

Por comparação, segue que

$$5(v^2 - c^2) = (4v^2 - c^2),$$

ou seja,

$$v^2 = 4c^2.$$

Como as velocidade são positivas, $v = 2c$. Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações do sistema, obtemos $c = 2$ e, consequentemente, $v = 4$.

14. (Extraído da OBM)
Sendo x e y os números de filhos e filhas do pai de Samuel. Como Samuel tem 3 irmãos a mais que irmãs podemos escrever

$$(x - 1) = y + 3.$$

Além disso, Samila tem 2 vezes mais irmãos do que irmãs, então ficamos com

$$x = 2(y - 1).$$

Resolvendo o sistema encontramos $x = 10$ e $y = 6$. Portanto há um total de 16 filhos.

15. (Extraído da OBM)
Seja x o número de cães. Então temos o seguinte:

	Acham que são cães	Acham que são gatos
Cães	90% de x = 0,9x	10% de x = 0,1x
Gatos	10% de 10 = 1	90% de 10 = 9

O número de animais é $10 + x$ e 20% deles acham que são gatos. Portanto, $0,2(10 + x)$ acham que são gatos. Entretanto, da tabela sabemos que $0,1x + 9$ animais acham que são gatos. Logo,

$$0,2(10 + x) = 0,1x + 9$$

e então $x = 70$. Ou seja, são 70 cães.

16. (Extraído da OBM)
Suponha que Neto tenha nascido no ano x e seu avô no ano y. Então as idades de Neto e do avô no fim de 1994 são respectivamente $1994 - x$ e $1994 - y$. De modo que podemos escrever

$$1994 - x = \frac{1994 - y}{2}.$$

Além disso, perceba que

$$x + y = 3844.$$

Agora, o sistema tem resposta com $x = 1946$ e $y = 1898$. Por fim, em 2006, Neto completou $2006 - 1946 = 60$ anos.

17. (Extraído da OBM)
Se ele acertou a problemas e errou b problemas, podemos escrever

$$\begin{cases} a + b = 80 \\ 5a - 3b = 8 \end{cases}$$

Daí, ele acertou 31 problemas.

18. Seja A a fração da casa que Alvo pinta em um dia, I a que Ivo pinta em um dia e E a fração de Eva. Então,

$$\begin{cases} A+I=\frac{1}{3} \\ I+E=\frac{1}{4} \\ A+E=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$A+I+E=\frac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}}{2}=\frac{3}{8}$$

Ou seja, os três juntos pintam três oitavos da casa em um dia. Dessa forma levarão $\dfrac{8}{3}$ dias para pintar completamente a casa. Isto é, eles pintarão a casa em 2 dias e mais $\dfrac{2}{3}$ de dia.

19. (Extraído da OMCPLP $-$ 2013)
Se há ℓ laranjas e c cestas, então

$$\begin{cases} 2c+4=\ell \\ 5\cdot(c-1)=\ell. \end{cases}$$

Esse sistema tem solução $c=3$ e $\ell=10$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com