Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Potenciação

Oitavo Ano

Portal da Matemática
OBMEP

Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas
Potenciação

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Calcule o valor das expressões:*

a) 3^5.

b) $2^2 + 3^2$.

c) 5^4.

d) $2^3 + 3^3$.

e) $\frac{1}{2} \cdot 2^4 \cdot 3$.

Exercício 2. *Calcule o valor das expressões:*

a) $(0,01)^3$.

b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$.

c) $80 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$.

d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$.

e) $200 \cdot (0,04)^4$.

Exercício 3. *Se $a = 2$ e $b = 3$, calcule o valor das expressões:*

a) $\frac{a^3 b}{b^2}$.

b) a^b.

c) $a^3 b^2$.

d) $(ab^2)^2$.

e) $(b + a)^2 - a^2$.

Exercício 4. *Escreva como um única potência:*

a) $\frac{2^4 \cdot 2^6}{3^7 \cdot 3^3}$.

b) $\frac{4^6 \cdot 8^2}{16^3}$.

c) $(-32)^{3^2}$.

d) $\frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-7} \cdot 10^4}$.

e) $8^3 : 2^{-5}$.

Exercício 5. *Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.*

a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$.

b) $a^{-n} = -a^n$.

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a - b)^n$.

d) $(a^n)^m = a^{nm}$.

e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$.

Exercício 6. *Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.*

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

b) $(a + b)^n = a^n + b^n$.

c) $a^{n+m} = a^n + a^m$.

d) $(a^n)^{-n} = a^0$.

e) *Se* $a \neq 0$ *então* $a^0 = 1$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. *Calcule as potências:*

a) $(0,3)^2$.

b) $(0,3)^{-2}$.

c) $(-0,02)^3$.

d) $(-3)^{-2}$.

e) $(1,2)^3$

Exercício 8. *Escreva cada um dos seguintes números como uma potência de 2:*

a) $(-0,5)^{-4}$.

b) $[(-0,25)^2]^{-6}$.

c) $16^2 : (0,25)^{-4}$.

d) $32^{-2} : (0,25)^{-4}$.

e) $0,16 \cdot 10^2$.

Exercício 9. *Determine, em cada item, qual dos números é o maior.*

a) $2^{1/2}$ *ou* $2^{1/3}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ *ou* $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$.

c) $3^{1/5}$ *ou* $5^{1/3}$.

Exercício 10. *Dividindo-se o número 4^{4^2} por 4^4 obtemos o número:*

(a) 2 (b) 4^3 (c) 4^4 (d) 4^8 (e) 4^{12}.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. *Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b. Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:*

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}.$$

(a) $\frac{1}{256}$ *(b)* $\frac{1}{4}$ *(c)* 1 *(d)* 4 *(e)* 256.

Exercício 12. *Para os inteiros a e b definimos $a * b = a^b + b^a$. Se $2 * x = 100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:*
(a) 20 *(b)* 25 *(c)* 30 *(d)* 35 *(e)* 27.

Exercício 13. *Com quantos zeros termina o número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?*
(a) 10 *(b)* 18 *(c)* 26 *(d)* 13 *(e)* 5.

Exercício 14. *As potências 2^n e 5^n, onde n é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo d. Qual é este algarismo?*

Exercício 15. *Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:*
(a) $c < b < a$ *(b)* $a < c < b$ *(c)* $b < a < c$
(d) $b < c < a$ *(e)* $c < a < b$.

Exercício 16. *Quantos dos números abaixo são maiores que 10?*
$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$.
(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 3 *(d)* 4 *(e)* 5.

Exercício 17. *Quanto vale $\sqrt{12^{12}}$?*
(a) 6^6 *(b)* $2^{2\sqrt{3}}$ *(c)* $2^{12} \cdot 3^6$
(d) 6^{12} *(e)* $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$.

Exercício 18. *Se $2(2^{2x}) = 4^x + 64$, então x é igual a:*
(a) -2 *(b)* -1 *(c)* 1 *(d)* 2 *(e)* 3.

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) 243.

b) $4+9=13$.

c) 625.

d) $8+27=35$.

e) $2^{4-1}\cdot 3=24$.

2.

a) $0,000001$.

b) 4.

c) $80\cdot\dfrac{125}{8}=1250$.

d) $\dfrac{1}{3}\cdot 0,09=0,03$.

e) $200\cdot\dfrac{256}{10^8}=0,000512$.

3.

a) $\dfrac{8}{3}$.

b) 8.

c) 72.

d) 324.

e) $5^2-2^2=21$.

4.

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$.

b) 2^6

c) -2^{45}.

d) 10^6.

e) 2^{14}.

5.

a) Verdadeiro.

b) Falso. Por exemplo, $2^{-1}=\dfrac{1}{2}\neq -2$.

c) Falso. Por exemplo, $\left(\dfrac{2}{1}\right)^2=4\neq(2-1)^2=1$.

d) Verdadeiro.

e) Falso. Por exemplo, $(2^2)^3=64\neq 256=2^{(2^3)}$.

6.

a) Verdadeiro.

b) Falso. Por exemplo, $(1+2)^3=27\neq 9=1^3+2^3$.

c) Falso. Por exemplo, $2^{2+1}=8\neq 5=2^2+2^1$.

d) Falso. Por exemplo, $(2^2)^{-2}=\dfrac{1}{16}\neq 1=2^0$.

e) Verdadeiro.

2 Exercícios de Fixação

7.

a) $0,09$.

b) $\dfrac{100}{9}$.

c) $-0,000008$.

d) $\dfrac{1}{9}$.

e) $1,728$.

8.

a) $2^4=16$.

b) 2^{24}.

c) 1.

d) 2^{-18}.

e) 2^4.

9.

a) Como $2^3>2^2$*, segue que*

$$2^{1/2}=(2^3)^{1/6}>(2^2)^{1/6}=2^{1/3}.$$

b) Pelo item anterior, $2^{1/2}>2^{1/3}$ *e consequentemente* $\dfrac{1}{2^{1/2}}<\dfrac{1}{2^{1/3}}$.

c) Como $3^3<5^5$*, segue que* $3^{1/5}=(3^3)^{1/15}<(5^5)^{1/15}=5^{1/3}$.

10. $4^{4^2}:4^4=4^{4^2-4}=4^{12}$. *Resposta E.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

11.

$$\begin{aligned} \frac{2\otimes(2\otimes(2\otimes 2))}{((2\otimes 2)\otimes 2)\otimes 2} &= \frac{2\otimes(2\otimes 4)}{(4\otimes 2)\otimes 2} \\ &= \frac{2\otimes 16}{16\otimes 2} \\ &= \frac{2^{16}}{16^2} \\ &= 2^8. \end{aligned}$$

Resposta E.

12. *Como* $2 * x = 2^x + x^2$ *e* x *é inteiro, devemos ter* $x^2 \in \{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\}$. *Dentre os elementos listados, o único possível para o qual* $100 - x^2$ *é uma potência de* 2 *é* $x^2 = 36$ *pois nesse caso* $x = 6$ *e* $100 - x^2 = 64 = 2^6$. *Consequentemente* $(4x)^4 = 256x^4 = 256 \cdot 1296 = 331776$. *Resposta E.*

13.

$$\begin{aligned} 15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7 &= (3^6 \cdot 5^6) \cdot (2^{10} \cdot 7^5) \cdot (5^7 \cdot 11^7) \\ &= 3^6 \cdot 11^7 \cdot 5^3 \cdot 10^{10} \end{aligned}$$

Logo, o número termina em 10 *zeros. Resposta A.*

14. *Representemos os dígitos desconhecidos de* 2^n *e* 5^n *com asteriscos. Se* k *e* l *são as quantidades de algarismos de cada um deles, temos:*

$$\begin{aligned} d \cdot 10^k < d * * * \ldots * &= 2^n < (d+1) \cdot 10^k \\ d \cdot 10^l < d * * * \ldots * &= 5^n < (d+1) \cdot 10^l \end{aligned}$$

Multiplicando ambas as inequações, obtemos $10^{k+l} \cdot d^2 < 10^n < 10^{k+l} \cdot (d+1)^2$. *Cancelando* 10^{k+l} *em ambos os lados, concluímos que existe uma potência de* 10 *entre* d^2 *e* $(d+1)^2$. *Analisando os quadrados dos dígitos de* 1 *até* 9, *percebemos que isso ocorre apenas para* $d = 3$*(* $3^2 < 10 < 4^2$*).*

15. $a = 2^{40} = 16^{10}$, $b = 3^{20} = 9^{10}$ *e* $c = 7^{10}$. *Como* $16 > 9 > 7$, *temos* $a > b > c$. *Resposta A.*

16. *Os quadrados dos números são respectivamente:* 99, 112, 125, 108 *e* 98. *Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.*

17. $\sqrt{12^{12}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$. *Resposta C.*

18.

$$\begin{aligned} 64 &= 2(2^{2x}) - 4^x \\ &= 2 \cdot 2^{2x} - 2^{2x} \\ &= 2^{2x}. \end{aligned}$$

Como $64 = 2^6$, *temos* $2x = 6$. *Resposta E.*