Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios

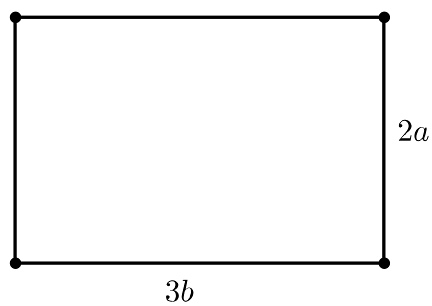
Expressões Algébricas e Polinômios.

8° ano/E.F.

Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios.
Expressões Algébricas e Polinômios.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo.



Exercício 2. Em um edifício existem x apartamentos com 3 quartos e y apartamentos com 4 quartos. Escreva a expressão que representa o total T de quartos desse edifício.

Exercício 3. Em uma sala de aula com x alunos, metade possui $R\$10,00$ e a outra metade possui $\$20,00$. Escreva a expressão que representa a quantia total Q que os alunos possuem.

Exercício 4. Sabendo que o número de diagonais de um polígono convexo pode ser representado pela expressão $\dfrac{n^2-3n}{2}$, sendo n o número de lados desse polígono, determine o número de diagonais de um octógono convexo.

Exercício 5. A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dada pela expressão $\dfrac{(1+n)n}{2}$. Determine a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos.

Exercício 6. A fórmula de *Lorentz* permite calcular a massa ("peso") ideal de uma pessoa, em kg, com base em sua altura h, em centímetros, e é dada por $P = (h-100) - \dfrac{h-150}{k}$, sendo $k=4$ para os homens e $k=2$ para as mulheres. Determine a massa ideal, com base nessa fórmula, para um homem com $1,75m$.

Exercício 7. Sejam os monômios A = $4x^2a^3$ e B = $3xa$. Determine:

a) $A \cdot B$.

b) $\dfrac{A}{B}$.

Exercício 8. Sejam os polinômios $P = x^2+3x-4$ e $Q = x^2+2$, determine:

a) $P+Q$.

b) $P-Q$.

c) $P \cdot Q$.

Exercício 9. Os produtos algébricos da forma $(x+a)(x+b)$, onde x é variárel e a e b são números reais quaisquer, podem ser resolvidos sem necessidade da multiplicação tradicional, já que $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$, por exemplo $(x+2)(x+5) = x^2+7x+10$. Utilize este princípio e resolva os produtos:

a) $(x+1)(x+2)$

b) $(x+3)(x+9)$.

c) $(x-2)(x+3)$.

d) $(x-4)(x+4)$.

e) $(x+5)(x+5)$.

f) $(x-4)(x-4)$.

g) $(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$.

2 Exercícios de Fixação

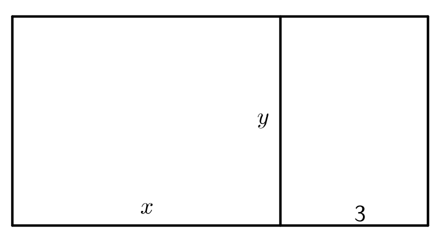
Exercício 10. Uma piscina, em forma de paralelepípedo, tem como dimensões, em metros, x de largura, $2x$ de comprimento e y de altura. Determine:

a) a expressão que representa o seu volume.

b) a expressão que representa sua área total.

c) a quantidade de água, em litros, necessária para enchê-la completamente, sendo $x = 3m$ e $y = 2m$.

Exercício 11. A figura abaixo representa um terreno dividido em duas partes retangulares.



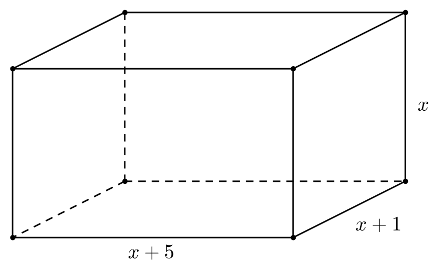
Determine:

a) a expressão que representa a área do terreno.

b) a área do terreno para $x = 20m$ e $y = 15m$.

Exercício 12. Verifique se 3 é raiz do polinômio $P = x^3-4x^2+5x-6$.

Exercício 13. A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo.



Determine:

a) a expressão que determina seu volume.

b) o volume para $x = 3$.

Exercício 14. A estatura de um adulto do sexo feminino pode ser estudada através das alturas de seus pais pela expressão $\frac{(y-13)+x}{2}$. Considere que x é a altura da mãe e y, a do pai, em cm. Somando-se ou subtraindo-se $8,5cm$ da altura estimada, obtém-se, respectivamente, as alturas máxima e mínima que a filha pode atingir. Segundo essa fórmula, se João tem $1,72m$ e sua esposa $1,64m$, sua filha medirá no máximo:

a) $1,70m$.

b) $1,71m$.

c) $1,72m$.

d) $1,73m$.

e) $1,74m$.

Exercício 15. Uma empresa produtora de canetas tem seu lucro L, dado em milhares de reais, expresso por $L = -x^2 + 12x - 11$, sendo x a quantidade de canetas, produzidas e vendidas, vezes mil. Supondo que em novembro de 2015 a empresa tenha produzido, e vendido, 10.000 canetas, qual foi o seu lucro neste mês?

Exercício 16. Sejam os polinômios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ e $Q(x) = x^2 - 1$. Determine:

a) $P(x) \cdot Q(x)$.

b) o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

Exercício 17. Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ por $Q(x) = x^2 - x + 1$.

Exercício 18. Sabe-se que na divisão de um polinômio P de uma variável por outro polinômio, na mesma variável, na forma $(x + a)$, o resto pode ser calculado sem necessidade de utilizar o dispositivo de divisão polinomial, mas apenas encontrando o valor numérico de P, quando $x = -a$. É o chamado *Teorema do Resto*. Use este teorema para calcular o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ por:

a) $x - 1$.

b) $x + 1$.

c) $x - 3$.

d) $x + 4$.

e) $x - \frac{1}{2}$.

Exercício 19. De uma cartolina quadrada de $50cm$ de lado, retira-se um quadrado, de cada um dos cantos, de lado xcm, sendo $0 < x < 25cm$. Determine:

a) a expressão que determina a área da cartolina após os cortes.

b) a expressão que determina o volume da caixa obtida.

c) a área e o volume da cartolina se $x = 5cm$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 20. A raíz quadrada aproximada de um natural n pode ser encontrada através da expressão $\frac{n+k}{2\sqrt{k}}$, sendo k o quadrado perfeito menor que n e mais próximo de n.

a) Determine a raiz quadrada aproximada de 19.

b) Justifique que a expressão dada é uma boa aproximação.

Exercício 21. (EPCAR - 2012 - Adaptado) Simplifique a expressão: $\frac{(x^{2n+1}+x)(x^{2n+1}-x)-(x^4)^{n+\frac{1}{2}}}{(x^n+x)^2-x^{2n}-2x^{n+1}}, x \neq 0$.

Exercício 22. (CN 2011 - adaptado) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Determine:

a) o valor da expressão para $x = 2$.

b) o maior valor possível para a expressão.

Exercício 23. (CN) Numa divisão polinomial, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são respectivamente: $4x^3 + ax^2 + 19x - 8$, $2x - b$, $2x^2 - 5x + 7$ e -1. A soma dos valores de a e b é igual a:

a) -14.

b) -13.

c) -12.

d) -11.

e) -10.

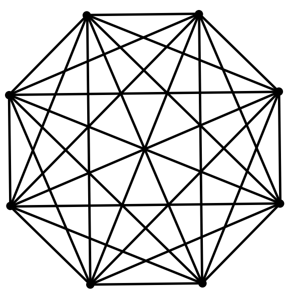
Respostas e Soluções.

1. $A = (2a) \cdot (3b) = 6ab$ e $P = 2(2a + 3b) = 4a + 6b$.

2. $T = 3x + 4y$.

3. Como o total de alunos é x, então metade dos alunos é $\frac{x}{2}$. Temos então $Q = 10 \cdot \frac{x}{2} + 20 \cdot \frac{x}{2} = 5x + 10x = 15x$.

4. (Extraído da Vídeo Aula) Usando a expressão dada para $n = 8$, já que se trata de um octógono, temos $\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{8^2 - 3 \cdot 8}{2} = 20$ diagonais. Podemos também, de uma maneira menos simples, contar utilizando um desenho, como na figura a seguir.



Perceba que, de cada vértice, partem 5 diagonais. Como são 8 vértices, teríamos 40 diagonais, porém todas contadas duas vezes, já que cada diagonal parte de 2 vértices, ou seja, são 20 diagonais.

5. Para $n = 100$, temos $\frac{(1+n)n}{2} = \frac{(1+100)100}{2} = 5050$.

6. (Extraído da Vídeo Aula) Como se trata de um homem, devemos usar $k = 4$. Temos então $P = (h - 100) - \frac{h - 150}{k} = (175 - 100) - \frac{175 - 150}{4} = 75 - 6,25 = 68,75kg$.

7.

a) $A \cdot B = (4x^2a^3)(3xa) = 12x^3a^4$.

b) $\frac{A}{B} = \frac{4xa^2}{3}$.

8.

a) $2x^2 + 3x - 2$.

b) $3x - 6$.

c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

9.

a) $x^2 + 3x + 2$.

b) $x^2 + 12x + 27$.

c) $x^2 + x - 6$.

d) $x^2 - 16$.

e) $x^2 + 10x + 25$.

f) $x^2 - 8x + 16$.

g) $x^2 + 2x + \frac{3}{4}$.

10.

a) $V = x \cdot 2x \cdot y = 2yx^2$.

b) $A = 2 \cdot xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 2x^2 + 6xy$.

c) Se $x = 3m$ e $y = 2m$, então temos $V = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36m^3 = 36.000\ell$.

11.

a) a área do terreno é $A = xy + 3y$.

b) $A = 20 \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 300 + 45 = 345m^2$.

12. Fazendo $x = 3$, temos $P = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 27 - 36 + 15 - 6 = 0$. Portanto 3 é raiz do polinômio.

13.

a) $V = (x + 5)(x + 1)x = x^3 + 6x^2 + 5x$.

b) $V = 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 = 96$.

14. (Extraído da Vídeo Aula - UERJ) Como o pai mede $1,72m = 172cm$ e a mãe mede $1,64m = 164cm$, a filha terá uma altura estimada de $\frac{(172 - 13) + 164}{2} = 161,5cm$, sendo sua altura máxima igual a $161,5 + 8,5 = 170cm = 1,70m$. Resposta A.

15. Se a quantidade de canetas é 10.000, então $x = 10$. Temos então que o lucro da empresa foi $L = -10^2 + 12 \cdot 10 - 11 = -100 + 120 - 11 = 9$, ou seja, $R\$9.000,00$.

16.

a)

$$\begin{aligned}(x^3 - 2x + 1)(x^2 - 1) &= x^5 - x^3 - 2x^3 + 2x + x^2 - 1 \\ &= x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1.\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x+1 & x^2-1 \\
\cline{2-2}
-x^3+x & \quad x \\
\cline{1-1}
-x+1 &
\end{array}
$$

Portanto, o quociente é $Q(x) = x$ e o resto é $R(x) = -x+1$.

17.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2+x-1 & x^2-x+1 \\
\cline{2-2}
-x^3+x^2-x & \quad x-1 \\
\cline{1-1}
-x^2-1 & \\
x^2-x+1 & \\
\cline{1-1}
-x &
\end{array}
$$

Portanto, o quociente é $Q(x) = x-1$ e o resto é $R(x) = -x$.

18.

a) $R = P(1) = 1^3 - 4\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 1 = 1$.

b) $R = P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 1 = -11$

c) $R = P(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 + 5\cdot 3 - 1 = 5$.

d) $R = P(-4) = (-4)^3 - 4(-4)^2 + 5(-4) - 1 = -149$.

e) $R = P(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 + 5(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{5}{8}$.

19.

a) $A = (2500 - 4x^2)cm^2$.

b) $V = (50-2x)(50-2x)x = (4x^3 - 200x^2 + 2500x)cm^3$.

c) $A = (2500 - 4\cdot 25) = 2400cm^2$.

$V = 4\cdot 5^3 - 200\cdot 5^2 + 2500\cdot 5 = 500 - 5000 + 12500 = 8000cm^3$.

20.

a) Como o quadrado perfeito mais próximo e menor que 19 é 16, temos $\sqrt{19} \cong \dfrac{n+k}{2\sqrt{k}} = \dfrac{19+16}{2\cdot 4} = \dfrac{35}{8} = 4,375$. Use uma calculadora para verificar se o valor encontrado pela fórmula foi satisfatório.

b) Como tomamos k o mais próximo possível de n, então $\sqrt{k}$ será mais próxima ainda de $\sqrt{n}$, ou seja, $\sqrt{n} - \sqrt{k} \cong 0$, e também o quadrado dessa diferença estará próximo de zero. Temos então:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{n} - \sqrt{k})^2 &\cong 0 \\
(\sqrt{n} - \sqrt{k})(\sqrt{n} - \sqrt{k}) &\cong 0 \\
n - \sqrt{n}\sqrt{k} - \sqrt{n}\sqrt{k} + k &\cong 0 \\
n - 2\sqrt{n}\sqrt{k} + k &\cong 0 \\
2\sqrt{n}\sqrt{k} &\cong n+k \\
\sqrt{n} &\cong \frac{n+k}{2\sqrt{k}}.
\end{aligned}
$$

21.

$$
\begin{aligned}
\frac{(x^{2n+1}+x)(x^{2n+1}-x) - (x^4)^{n+\frac{1}{2}}}{(x^n+x)^2 - x^{2n} - 2x^{n+1}} &= \\
\frac{x^{4n+2} - x^2 - x^{4n+2}}{x^{2n} + 2x^{n+1} + x^2 - x^{2n} - 2x^{n+1}} &= \\
\frac{-x^2}{x^2} &= -1.
\end{aligned}
$$

22.

a) $\sqrt[3]{-(2-1)^6} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

b) Sabe-se que $(x-1)^6 \geq 0$. Assim $-(x-1)^6 \leq 0$, ou seja, seu maior valor é 0, bem como 0 é o maior valor de toda a expressão.

23. Sendo $S = 4x^3 + ax^2 + 19x - 8$, temos:

$$
\begin{aligned}
S &= (2x-b)(2x^2-5x+7) - 1 \\
S &= 4x^3 - (10+2b)x^2 + (5b+14)x - 7b - 1.
\end{aligned}
$$

Temos então que $5b + 14 = 19$, seque que $b = 1$. Temos também que $a = -(10+2b)$, segue que $a = -12$. Assim, chegamos a $a + b = -11$. Resposta D.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com