# Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

## Produtos Notáveis - Parte 2

## Oitavo Ano

**Autor: Ulisses Lima Parente**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**20 de julho de 2021**



Portal da Matemática
OBMEP

# 1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos exercícios variados envolvendo produtos notáveis.

**Exemplo 1.** *Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais positivos tais que $x^2+y^2+z^2=38$ e $xy+xz+yz=31$. Calcule o valor de $x+y+z$.*

**Solução.** Utilizando a fórmula para o quadrado da soma de três termos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\\ &= 38+2\cdot 31\\ &= 100.\end{aligned}$$

Logo,

$$x+y+z=\sqrt{100}=10.$$

$\square$

**Exemplo 2.** *Se $x$ e $y$ são números reais tais que $xy=9$ e $x+y=6$, assinale a alternativa que corresponde ao valor de $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$:*

(*a*) 2.

(*b*) 4.

(*c*) 6.

(*d*) 8.

(*e*) 10.

**Solução.** Observe inicialmente que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2}{9}.$$

Para calcular o valor de $x^2+y^2$, note que, por um lado,

$$x+y=6 \Rightarrow (x+y)^2=6^2=36.$$

Por outro,

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\ &= x^2+y^2+2\cdot 9\\ &= x^2+y^2+18.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$36 = x^2+y^2+18 \Longrightarrow x^2+y^2=18.$$

Agora,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{9}=\frac{18}{9}=2.$$

A alternativa correta é a letra **(a)**. □

**Exemplo 3.** *Calcule o valor da expressão numérica* $0{,}779^2 - 0{,}221^2$.

**Solução.** A fórmula para a diferença de dois quadrados diz que

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

Aplicando-a com $x = 0{,}779$ e $y = 0{,}221$, obtemos:

$$\begin{aligned}0{,}779^2-0{,}221^2 &= (0{,}779+0{,}221)(0{,}779-0{,}221)\\ &= 1\cdot 0{,}558\\ &= 0{,}558.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 4** (OBM). *Qual das opções a seguir corresponde ao valor da expressão* $20112011^2 + 20112003^2 - 16\cdot 20112007$*?*

(*a*) $2\cdot 20112007^2$.

(*b*) $2\cdot 20112003^2$.

(*c*) $2\cdot 20112007$.

(*d*) $2\cdot 20112003$.

(e) $2 \cdot 20112011^2$.

**Solução.** Fazendo $x = 20112007$, temos $x - 4 = 20112003$ e $x + 4 = 20112011$. Assim,

$$\begin{aligned} & 20112011^2 + 20112003^2 - 16 \cdot 20112007 = \\ &= (x+4)^2 + (x-4)^2 - 16x \\ &= x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x \\ &= 2x^2 - 16x + 32 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2(x-4)^2 \\ &= 2 \cdot 20112003^2. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

**Exemplo 5.** *Sabe-se que* $9x + 5y = 1$ *e* $9x - 5y = 3$*. Calcule o valor numérico da expressão algébrica*

$$\frac{2^{81x^2}}{2^{25y^2}}.$$

**Solução.** Veja que

$$\begin{aligned} \frac{2^{81x^2}}{2^{25y^2}} = 2^{81x^2 - 25y^2} &= 2^{(9x)^2 - (5y)^2} \\ &= 2^{(9x+5y)(9x-5y)} = 2^{1 \cdot 3} \\ &= 2^3 = 8. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 6.** *Seja* $x$ *um número real positivo tal que* $x + \frac{1}{x} = 4$*. Calcule o valor numérico de* $x^3 + \frac{1}{x^3}$*.*

**Solução.** Uma vez que $\frac{1}{x^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$, comecemos desenvolvendo a expressão $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$. Recordando que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

e fazendo $y = \frac{1}{x}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + 3\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= 4^3 - 3\cdot 4\\ &= 52.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 7** (OBM). *Assinale a opção que corresponde ao valor de $x+y$, em que $x$ e $y$ são reais tais que $x^3+y^3=9$ e $xy^2+x^2y=6$:*

$(a)$ 1.

$(b)$ 2.

$(c)$ 3.

$(d)$ 4.

$(e)$ 5.

**Solução.** Veja que

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\ &= \left(x^3+y^3\right) + 3(xy^2 + x^2y)\\ &= 9 + 3\cdot 6\\ &= 27.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$x + y = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

**Exemplo 8** (OBM). *Se $x$ e $y$ são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$ , $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$ , calcule o valor de $xy$:*

$(a)$ 4.

$(b)$ 3.

$(c)$ 1.

$(d)$ 0.

$(e)$ $-1$.

**Solução.** Utilizando a fatoração para a soma de dois cubos,

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

juntamente com a informação de que

$$x^3 + y^3 = 5(x + y),$$

obtemos

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 5(x + y).$$

Uma vez que $x + y \neq 0$, podemos cancelar o fator $x + y$ em ambos os membros da última igualdade, ficando com

$$x^2 - xy + y^2 = 5.$$

Agora, fazendo a substituição $x^2 + y^2 = 4$ na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = 5 &\Longrightarrow 4 - xy = 5 \\ &\Longrightarrow xy = -1. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 9.** *Dentre as opções a seguir, assinale a que traz um valor de $n$ para o qual o número $2^{20} + 2^{26} + 2^n$ é um quadrado perfeito:*

$(a)$ 10.

$(b)$ 15.

$(c)$ 30.

$(d)$ 20.

$(e)$ 12.

**Solução.** Vamos utilizar a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, para encontrar $n$ tal que a expressão $2^{20} + 2^{26} + 2^n$ possa ser escrita como um quadrado perfeito. Temos

$$\begin{aligned} 2^{20} + 2^{26} + 2^n &= \left(2^{10}\right)^2 + 2 \cdot 2^{25} + 2^n \\ &= \left(2^{10}\right)^2 + 2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{15} + 2^n. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\left(2^{15}\right)^2 = 2^{30}$, ao fazermos a substituição $n = 30$, obtemos um quadrado perfeito:

$$\begin{aligned} \left(2^{10}\right)^2 + 2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{15} + 2^{30} &= \left(2^{10}\right)^2 + 2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{15} + \left(2^{15}\right)^2 \\ &= \left(2^{10} + 2^{15}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

**Exemplo 10.** *Se $x$, $y$, $a$ e $b$ são números reais positivos tais que $\sqrt{x-y} = a$ e $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, qual o valor de $\sqrt{xy}$?*

$(a)$ $\dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$.

$(b)$ $\dfrac{a^2}{b}$.

(c) $\dfrac{b^2+a^2}{b}$.

(d) $\dfrac{1}{b}$.

(e) $a^2$.

**Solução.** Veja que

$$\sqrt{x-y}=a \Longrightarrow x-y=a^2$$

e

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) &= \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\\ &= x-y.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{a^2}{b}.$$

Agora, somando membro a membro as igualdades $\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$ e $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{a^2}{b}$, obtemos

$$\sqrt{x}=\frac{b^2+a^2}{2b} \quad \text{e} \quad \sqrt{y}=\frac{b^2-a^2}{2b}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} &= \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\\ &= \frac{b^2+a^2}{2b}\cdot\frac{b^2-a^2}{2b}\\ &= \frac{\left(b^2+a^2\right)\left(b^2-a^2\right)}{2b\cdot 2b}\\ &= \frac{\left(b^2\right)^2-\left(a^2\right)^2}{4b^2}\\ &= \frac{b^4-a^4}{4b^2}.\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(a)**. □

# Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É importante que os alunos memorizem as fórmulas para os vários produtos notáveis e fatorações, pois assim os cálculos ficam mais simples e os erros diminuem. Isso deve acontecer de forma natural, à medida que eles fizerem uma boa quantidade de exercícios. Entretanto, enquanto esse processo não estiver completo, vale a pena deduzir as fórmulas novamente. Como na aula anterior, ressalte a diferença entre "quadrado de uma soma" e "soma de quadrados", "cubo de uma soma" e "soma de cubos", etc.

A referência a seguir contém uma discussão completa de produtos notáveis e fatorações, assim como vários outros exercícios envolvendo tais temas.



# Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.