Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis

Oitavo Ano

Portal da Matemática
OBMEP

Produtos Notáveis

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Siga o modelo e calcule os produtos notáveis:*

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2\\ &= x^2+10x+25\end{aligned}$$

a) $(x+1)^2$.

b) $(4+x)^2$.

c) $(x+\sqrt{3})^2$.

d) $(3x+1)^2$.

e) $(4x+2)^2$.

Exercício 2. *Calcule os produtos notáveis:*

a) $(2x+3)^2$.

b) $(2x+3y)^2$.

c) $(x^2+3)^2$.

d) $(a^2+3b^2)^2$.

e) $(x^4+3^2)^2$.

Exercício 3. *Veja o seguinte exemplo para calcular o quadrado de um número:*

$$\begin{aligned}42^2 &= (40+2)^2\\ &= 40^2+2\cdot 40\cdot 2+2^2\\ &= 1600+160+4\\ &= 1764\end{aligned}$$

Calcule os quadrados de 13, 41 *e* 19 *sem usar a calculadora.*

Exercício 4. *Calcule o valor das expressões:*

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}$.

b) $(x+1)^2+(x-1)^2$.

c) $(a+1)^2+2(a+1)a+a^2+2(2a+1)+1$.

Exercício 5. *Calcule as expressões:*

a) $(-a-b)^2$.

b) $(-2a+b)^2$.

c) $(2ab+3c)^2$.

d) $(2a-2b)^2$.

Exercício 6. *Calcule os produtos:*

a) $(x-1)(x+1)$.

b) $(4-a)(4+a)$.

c) $(x^2-3z)(x^2+3z)$.

d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$

Exercício 7. *Siga o modelo abaixo e calcule o valor das expressões dadas.*

$$\begin{aligned}27\cdot 33 &= (30-3)(30+3)\\ &= 30^2-3^2\\ &= 891\end{aligned}$$

a) $99\cdot 101$.

b) $1998\cdot 2002$.

c) $5\cdot 15+25$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. *Ao efetuarmos a multiplicação* $(a+b)(a+b)$ *usando a distributividade, quantas operações de multiplicação faremos?*

Exercício 9. *Repita o exercício anterior com a multiplicação* $(a+b)(a+b)(a+b)$. *Em seguida, determine quantas cópias de* a^2b *aparecem no resultado. Finalmente, conclua com argumentos de contagem que:*

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Exercício 10. *Encontre uma figura que explique geometricamente, através do uso de áreas, a equação:*

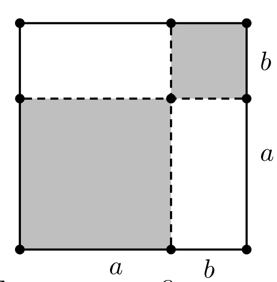
$$1+2+3+4+5+6=\frac{6\cdot 7}{2}.$$

Exercício 11. *A figura abaixo explica geometricamente, usando áreas, o desenvolvimento do produto notável*

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Você conseguiria obter uma figura que explicasse geometricamente, também usando áreas, a equação

$$(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)?$$



Exercício 12. *Encontre uma figura que explique geometricamente, através do uso de áreas, a equação:*

$$1+3+5+\ldots+17=9^2$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. *O professor Medialdo acaba de explicar a seus alunos que a média aritmética de dois números a e b é* $\dfrac{a+b}{2}$ *e a média geométrica é* $\sqrt{ab}$. *Antes de entregar as notas de duas provas aplicadas anteriormente, ele decidiu testar o conhecimento dos seus alunos perguntando se eles prefeririam que cada um recebesse a média geométrica ou a média aritmética das duas notas. Considerando que os alunos desejam a maior nota possível no boletim, o que eles devem dizer ao professor Medialdo?*

Exercício 14. *João deseja construir um retângulo usando um arame com 2 metros de comprimento. Qual é a maior área possível de tal retângulo?*

Exercício 15. *Sejam a e b números reais.*

a) Verifique que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

b) Verifique que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$.

c) Verifique que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Exercício 16. *Se x, y, a e b são reais tais que* $\sqrt{x-y} = a$ *e* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$, *determine o valor de* $\sqrt{xy}$.
(a) $\dfrac{b^4 - a^4}{4b^2}$ *(b)* $\dfrac{a^2}{b}$ *(c)* $\dfrac{a^2+b^2}{b}$
(d) $\dfrac{1}{b}$ *(e)* a^2.

Exercício 17. *Calcule o valor do número:*

$$20142013^2 - 2(20142013)(20142012) + 20142012^2$$

Exercício 18. *Sejam:*

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ B &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \\ &\quad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \end{aligned}$$

Quanto vale $A \cdot B$?
(a) $\sqrt{2}$ *(b)* $\sqrt{3}$ *(c)* 1 *(d)* $2+\sqrt{2}$ *(e)* $2+\sqrt{3}$.

Exercício 19. *João está ajudando seu pai com as finanças de sua loja. Como a quantidade de produtos ofertados estava influenciando a quantidade de produtos vendidos, ele decidiu procurar algum padrão que pudesse ajudá-lo a descobrir qual a quantidade ideal de produtos que deveriam ser ofertadas para maximizar a quantidade de produtos vendidos. Depois de um bom tempo "quebrando a cabeça", ele percebeu que se "a" produtos eram ofertados, então a loja vendia "$a(10-a)$" itens. Em seguida, com a ajuda de um produto notável semelhante a essa expressão, foi possível achar a quantidade ideal de produtos que deveriam ser vendidos. Como ele fez isso?*

Exercício 20. *O pai de João (veja o problema anterior), percebendo a astúcia do filho, decidiu desafiá-lo a fazer o mesmo com uma fórmula bem diferente e supondo agora que a é um número real qualquer. Nesse novo problema, dado "a" real, ele deve tentar achar o valor máximo de* $4a - a^4$. *Novamente usando produtos notáveis, João conseguiu descobrir que o máximo de tal expressão é 3. Você consegue descobrir como ele fez isso?*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) x^2+2x+1.

b) $16+8x+x^2$.

c) $x^2+2\sqrt{3}x+3$.

d) $9x^2+6x+1$.

e) $16x^2+16x+4$.

2.

a) $4x^2+12x+9$.

b) $4x^2+12xy+9y^2$.

c) x^4+6x^2+9.

d) $a^4+6a^2b^2+9b^4$.

e) x^8+18x^4+81.

3.

$$\begin{aligned}13^2 &= (10+3)^2\\ &= 100+60+9\\ &= 169;\\ 41^2 &= (40+1)^2\\ &= 1600+80+1\\ &= 1681;\\ 19^2 &= (20-1)^2\\ &= 400-40+1\\ &= 361.\end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab} &=\\ a+2\sqrt{ab}+b-2\sqrt{ab} &=\\ a+b.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(x-1)^2 &=\\ (x^2+2x+1)+(x^2-2x+1) &=\\ 2x^2+2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(a+1)^2+2(a+1)a+a^2+2(2a+1)+1 &=\\ ((a+1)+a)^2+2(2a+1)+1^2 &=\\ (2a+2)^2.\end{aligned}$$

5.

a) $a^2+2ab+b^2$.

b) $4a^2-4ab+b^2$.

c) $4a^2b^2+12abc+9c^2$.

d) $4a^2-8ab+4b^2$.

6. *a)* x^2-1.

b) $16-a^2$.

c) x^4-9z^2.

d)

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y) &=\\ (x-y)(x+y) &=\\ (x^2-y^2)\end{aligned}$$

7. *a)* $100^2-1^2=9999$.

b) $2000^2-4=3999996$.

c) $10^2-5^2+5^2=100$.

2 Exercícios de Fixação

8. *Cada termo obtido após usarmos a distributividade teve um de seus membros vindo de alguma letra entre os primeiros parênteses e o segundo vindo de alguma entre os segundos parênteses. Assim, como temos duas possibilidade de escolhas em cada um deles, teremos no total* 2×2 *termos possíveis na múltiplicação. Isso pode também pode ser facilmente visualizado se momentaneamente colocarmos um índice para distinguirmos de qual parêntese veio cada letra. Por exemplo:*

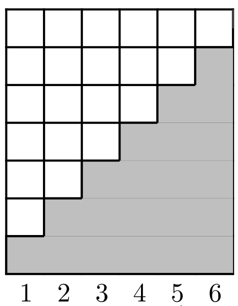
$$\begin{aligned}(a_1+b_1)(a_2+b_2) &=\\ a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2\end{aligned}$$

9. *Como temos três parênteses e em cada um deles temos duas escolhas, o número de termos é* $2\times 2\times 2=8$. *Para formarmos o termo* a^2b, *dois parênteses irão fornecer a letra "a" e o outro a letra* b. *Uma vez escolhido aquele que irá fornecer a letra "b", os demais estão determinados. Podemos fazer tal escoha de 3 formas e assim existirão três termos* a^2b. *O mesmo argumento se aplica ao termo* ab^2. *A única maneira de formarmos os termos* a^3 *e* b^3 *é escolhendo a mesma letra em todos os parênteses e isso só pode ser feito de uma forma. Assim,*

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

10. *O retângulo 6×7 desenhando abaixo foi dividido em duas figuras na forma de escada. Em cada coluna, estamos escrevendo quantos quadrados foram pintados. Como as duas figuras são iguais, a soma dos quadrados pintados - que corresponde ao termo $1+2+3+4+5+6$ da equação -, deve ser igual à metada da área do retângulo, ou seja,*

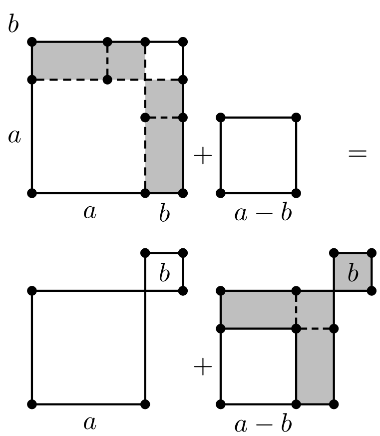
$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \cdot 7}{2}.$$



Construindo um rentângulo $n \times (n+1)$, é possível mostrar que:

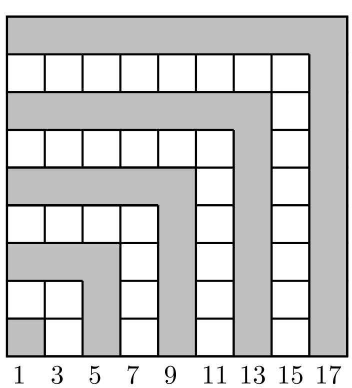
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

11. *Um exemplo seria:*



Comentário: *O exemplo anterior é de Shirley Wakin e foi retirado do livro "Proofs without words" escrito por Roger Nelsen. O leitor interessado poderá encontrar mais exemplos interessantes em tal fonte.*

12. *Um exemplo seria:*



Veja que área do quadrado maior de lado 9 é a soma das áreas das regiões destacadas e cada uma delas é da forma $2n+1$ onde n é o lado do quadrado que a região contorna. É possível construirmos quadrados cada vez maiores e mostrarmos que a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares é igual à k^2.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

13. *Como todo quandrado perfeito é um número não negativo, se a e b representam as notas de um aluno, temos:*

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0\\
a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0\\
a + b &\geq 2\sqrt{ab}\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Assim, é preferível escolher a média aritmética porque ela é sempre maior ou igual à média geométrica.

Comentário: *Provamos que se a e b são não negativos, então:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Isso é um caso particular do resultado mais geral de que a média aritmética de n números reais não negativos é sempre maior ou igual à média geométrica de tais números.

14. *Sejam a e b as dimensões do retângulo, devemos ter que $2a+2b=2$, ou seja, $a+b=1$. A área obtida será ab. Pelo exercício anterior,*

$$ab = (\sqrt{ab})^2 \leq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Assim, a área máxima é $\frac{1}{4}$. Podemos obtê-la construindo um quadrado de lado $\frac{1}{2}$.

15. *a) Vamos usar novamente o fato de que todo quadrado é um número não negativo, daí:*

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0\\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0\\
a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab\\
(a+b)^2 &\geq 4ab.
\end{aligned}$$

b) Dividindo a expressão do item anterior por $ab(a+b)$ obtemos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}.$$

c) *Usaremos o item anterior três vezes:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq \\ \left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\right)+\frac{16}{d} &\geq \\ \left(\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\right) &\geq \\ \frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

16. *(Extraído da OBM 2014) Usando a diferença de quadrados, podemos escrever:*

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (x-y).$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{x}-\sqrt{y} &= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{a^2}{b} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &= b\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos $\sqrt{x} = \dfrac{b^2+a^2}{2b}$ *e* $\sqrt{y} = \dfrac{b^2-a^2}{2b}$. *Assim,*

$$\sqrt{xy} = \frac{b^4-a^4}{4b^2}.$$

17. *Se denotarmos por* $a = 20142012$ *o valor da expressão anterior pode ser escrito como:*

$$\begin{aligned}(a+1)^2 - 2(a+1)a + a^2 &= [(a+1)-a]^2 \\ &= 1^2.\end{aligned}$$

18. *Pela diferença de quadrados, temos:*

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times \\ &\quad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Apliquemos novamente a diferença de quadrados para obter o número:

$$\begin{aligned}C &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot B \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Para terminar, veja que:

$$\begin{aligned}A\cdot B &= \sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot C \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Resposta C

19. *Note que:*

$$\begin{aligned}a(10-a) &= 10a - a^2 \\ &= 25 - 25 + 10a - a^2 \\ &= 25 - (5-a)^2\end{aligned}$$

Como $(5-a)^2$ *é sempre um número não negativo, a última expressão é no máximo* 25. *Tal valor é atingido apenas quando* $(5-a)^2 = 0$, *ou seja, quando* $a = 5$.

20.

$$\begin{aligned}4a - a^4 &= 4a - 2a^2 + 2a^2 - a^4 \\ &= 4a + 1 - 2a^2 - 1 + 2a^2 - a^4 \\ &= 4a + 1 - 2a^2 - (a^2-1)^2 \\ &= 3 - 2 + 4a - 2a^2 - (a^2-1)^2 \\ &= 3 - 2(a-1)^2 - (a^2-1)^2.\end{aligned}$$

Como $2(a-1)^2 + (a^2-1)^2$ *é sempre um número não negativo por se tratar da soma de três quadrados, a expressão anterior é no máximo* 3. *Veja que tal valor pode ser atingido quando* $a = 1$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com