Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis e Fatorações - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Fatorar uma expressão algébrica inteira E significa escrevê-la como um produto de outras expressões algébricas, caso isso seja possível. Nesse caso, dizemos que um tal produto é uma **forma fatorada** da E. Por exemplo, $(x+y)(x-y)$ é uma forma fatorada da expressão algébrica x^2-y^2. Ao longo desta aula, estudaremos algumas técnicas utilizadas para fatorar expressões algébricas.

1 Fatoração pondo fatores comuns em evidência

Pôr um fator comum em evidência, significa utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para fatorar uma expressão algébrica que é dada por uma soma de monômios, em que existe um fator comum a todos esses monômios. Por exemplo, pondo o fator comum 3 em evidência na expressão $3x+9$, obtemos $3x+9 = 3\cdot x + 3\cdot 3 = 3(x+3)$, sendo esta última uma forma fatorada de $3x+9$.

Exemplo 1. *Fatore a expressão algébrica* $5x^2+25x$.

Solução. Observe que o fator $5x$ é comum às parcelas $5x^2$ e $25x$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

$$5x^2+25x = 5x\cdot x + 5x\cdot 5 = 5x(x+5).$$

□

Exemplo 2. *Fatore a expressão algébrica* $6a^3+2a^2-10a$.

Solução. Neste caso, note que o fator $2a$ é comum aos monômios $6a^3$, $2a^2$ e $-10a$. Portanto, obtemos uma forma fatorada de $6a^3+2a^2-10a$ procedendo do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 6a^3+2a^2-10a &= 2a\cdot 3a^2 + 2a\cdot a + 2a\cdot(-5) \\ &= 2a(3a^2+a-5). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Fatore a expressão algébrica* $15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5$.

Solução. Denote por F a expressão algébrica do enunciado. Pondo o fator comum $5xy^2z^2$ em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} F &= 15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5 \\ &= 5xy^2z^2\cdot 3z + 5xy^2z^2\cdot(-4xy) + 5xy^2z^2\cdot(-2x^2y^2z^3) \\ &= 5xy^2z^2(3z-4xy-2x^2y^2z^3). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Fatorando o numerador e o denominador, simplifique a expressão algébrica* $\dfrac{9a^2-3a}{6ab-2b}$.

Solução. Pondo o fator $3a$ em evidência no numerador, obtemos:

$$\begin{aligned} 9a^2-3a &= 3a\cdot 3a + 3a\cdot(-1) \\ &= 3a(3a-1). \end{aligned}$$

Agora, pondo o fator comum $2a$ em evidência no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned} 6ab-2b &= 2b\cdot 3a + 2b\cdot(-1) \\ &= 2b(3a-1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{9a^2-3a}{6ab-2b} = \frac{3a\cancel{(3a-1)}}{2b\cancel{(3a-1)}} = \frac{3a}{2b}.$$

□

2 Fatoração utilizando produtos notáveis

Outra técnica utilizada para fatorar expressões algébricas é utilizar os produtos notáveis estudados na aula anterior. Por exemplo, notando que $25x^2+20x+4$ pode ser escrito da forma $(5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 2+2^2$, que, por sua vez, é o quadrado da soma dos termos $5x$ e 2, obtemos:

$$\begin{aligned} 25x^2+20x+4 &= (5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 2+2^2 \\ &= (5x+2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2)$ é uma forma fatorada de $25x^2+20x+4$.

Abaixo seguem mais alguns exemplos que ilustram como obter formas fatoradas de expressões algébricas utilizando produtos notáveis.

Exemplo 5. *Fatore a expressão algébrica* $9m^4-16n^2$.

Solução. Inicialmente, note que $9m^4 = \left(3m^2\right)^2$ e $16n^2 = (4n)^2$. Agora, utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, segue que

$$\begin{aligned} 9m^4-16n^2 &= \left(3m^2\right)^2 - (4n)^2 \\ &= (3m^2+4n)(3m^2-4n). \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo, o qual é consideravelmente mais elaborado que os anteriores, mostra que, por vezes, a utilização de um produto notável como estratégia de fatoração requer um passo intermediário, que, por vezes, resume-se a um *artifício algébrico*. Observamos que, à medida que você adquirir mais experiência com fatorações, artifícios como o que será utilizado nesse exemplo parecerão ser mais naturais do que à primeira vista.

Exemplo 6. *Fatore a expressão* x^4+4y^4.

Solução. Adicionando e subtraindo o monômio $4x^2y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4y^4+(4x^2y^2-4x^2y^2) \\ &= (x^4+4y^4+4x^2y^2)-4x^2y^2. \end{aligned}$$

Agora, observamos que a expressão $x^4+4y^4+4x^2y^2$ é o quadrado de uma soma de dois termos:

$$\begin{aligned} x^4+4y^4+4x^2y^2 &= \left(x^2\right)^2+2(x^2)(2y^2)+\left(2y^2\right)^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2. \end{aligned}$$

Por fim, juntando os dois passos anteriores, escrevendo $4x^2y^2=(2xy)^2$ e utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= \left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Fatore a expressão algébrica* $E=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} E &= 8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3 \\ &= (2a)^3-3\cdot 4a^2\cdot b+3\cdot(2a)\cdot b^2-b^3 \\ &= (2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot b+3\cdot(2a)\cdot b^2-b^3 \\ &= (2a-b)^3, \end{aligned}$$

em que, na última igualdade acima, utilizamos a fórmula para o cubo da diferença de dois termos. $\square$

Exemplo 8. *Para obter uma forma fatorada para a expressão* n^6-27, *basta notar que* $n^6=\left(n^2\right)^3$ *e* $27=3^3$. *Depois disso, utilizamos a fórmula da diferença de dois cubos. Assim, obtemos:*

$$\begin{aligned} n^6-27 &= \left(n^2\right)^3-3^3 \\ &= (n^2-3)\left[\left(n^2\right)^2+n^2\cdot 3+3^2\right] \\ &= (n^2-3)(n^4+3n^2+9). \end{aligned}$$

Para o próximo exemplo, recorde, da aula anterior, que a fórmula para o cubo da soma de três termos fornece

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Agora, suponha que $x+y+z=0$. Utilizando a identidade algébrica acima, segue que

$$\begin{aligned} 0=(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z) \\ &= x^3+y^3+z^3+3(-z)(-y)(-x), \end{aligned}$$

pois $x+y=-z$, $x+z=-y$ e $y+z=-x$. Daí, temos

$$x^3+y^3+z^3=3xyz. \tag{1}$$

Exemplo 9. *Fatore a expressão* $(a-c)^3+(c-b)^3+(b-a)^3$.

Solução. Note que $(a-c)+(c-b)+(b-a)=a-a+b-b+c-c=0$. Portanto, utilizando a identidade (1), segue que

$$(a-c)^3+(c-b)^3+(b-a)^3=3(a-c)(c-b)(b-a).$$

$\square$

A identidade algébrica

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= x^2-ax-bx+ab \\ &= x^2-(a+b)x+ab \end{aligned}$$

fornece a fatoração

$$x^2-Sx+P=(x-a)(x-b), \tag{2}$$

em que $S=a+b$ e $P=ab$. Por exemplo, temos

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5),$$

uma vez que $7=2+5$ e $10=2\cdot 5$. Assim, vemos que a chave para fatorar a expressão x^2-Sx+P é perceber S como sendo igual à soma e P como sendo igual à diferença de um mesmo par de números a e b, como no exemplo numérico acima. Uma expressão do tipo

$$x^2-Sx+P$$

é denominada um **trinômio do segundo grau** em x.

O próximo exemplo traz uma aplicação mais elaborada de fatorações do tipo (2).

Exemplo 10. *A fim de fatorar a expressão* $E=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$, *combinamos sucessivamente várias das estratégias discutidas até aqui: aplicamos a propriedade distributiva às duas últimas parcelas, agrupamos as parcelas obtidas em outra ordem, pomos fatores comuns em evidência, utilizamos a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos e, por fim, fatoramos um trinômio do segundo grau em a:*

$$\begin{aligned} E &= a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) \\ &= a^2(c-b)+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a \\ &= a^2(c-b)+(b^2a-c^2a)+(c^2b-b^2c) \\ &= a^2(c-b)+a(b^2-c^2)+bc(c-b) \\ &= a^2(c-b)+a(b+c)(b-c)+bc(c-b) \\ &= a^2(c-b)-a(b+c)(c-b)+bc(c-b) \\ &= (c-b)\left[a^2-a(b+c)+bc\right] \\ &= (c-b)(a-b)(a-c). \end{aligned}$$

3 Fatoração por agrupamento

Para fatorar uma expressão algébrica inteira por **agrupamento**, devemos, iniciamente, escrevê-la como soma de outras expressões algébricas (**grupos**), as quais devem ser fatoradas; depois disso, é necessário que apareça um fator comum a todas essas formas fatoradas, o qual deve ser posto em evidência.

Por exemplo, para fatorar a expressão algébrica

$$ac + bc + ad + bd,$$

começamos agrupando suas parcelas da forma $(ac + bc) + (ad + bd)$; em seguida, pomos o fator c em evidência nas duas primeiras parcelas e o fator d em evidência nas duas últimas, obtendo, assim:

$$(ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b).$$

Por fim, pondo $a + b$ em evidência no segundo membro da última igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Observe que, alternativamente, poderíamos ter agrupado a expressão $ac + bc + ad + bd$ da forma $(ac + ad) + (bc + bd)$. Neste caso, o fator a seria posto em evidência na soma $ac + ad$ e o fator b na soma $bc + bd$. Procedendo assim, obteríamos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (c + d)(a + b), \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, o fator comum $c+d$ foi posto em evidência para que pudéssemos obter a forma fatorada.

Abaixo, seguem mais alguns exemplos, os quais têm por objetivo aperfeiçoar a técnica de fatoração por agrupamento.

Exemplo 11. *Fatore a expressão* $6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3$.

Solução. Agrupando a expressão na forma $(6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3)$, pomos em evidência o fator $3x$ no primeiro grupo e o fator y^2 no segundo, obtendo:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 &= (6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3) \\ &= 3x(2x - 3y) + y^2(2x - 3y). \end{aligned}$$

Em seguida, pomos o fator $2x-3y$ em evidência, chegamos a

$$6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 = (2x - 3y)(3x + y^2).$$

□

Exemplo 12. *Simplifique a expressão algébrica*

$$\frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y}.$$

Solução. Fatorando o numerador e o denominador por agrupamento, obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 3x - 3y &= (x^2 - 3x) + (xy - 3y) \\ &= x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(x + y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + xy + 5y &= (x^2 + 5x) + (xy + 5y) \\ &= x(x + 5) + y(x + 5) \\ &= (x + 5)(x + y). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y} &= \frac{(x - 3)\cancel{(x + y)}}{(x + 5)\cancel{(x + y)}} \\ &= \frac{x - 3}{x + 5}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 13. *Determine uma forma fatorada para a expressão* $E = qm^3 + q^3 - 2m^3 - 2q^2 + q - 2$.

Solução. Agrupando a expressão da forma

$$E = (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2),$$

pondo o fator q em evidência no primeiro grupo e o fator -2 no segundo, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2) \\ &= q(m^3 + q^2 + 1) - 2(m^3 + q^2 + 1) \\ &= (m^3 + q^2 + 1)(q - 2). \end{aligned}$$

Outra possibilidade seria agrupar $E = (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2)$. Se procedêssemos assim, teríamos:

$$\begin{aligned} E &= (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2) \\ &= q^2(q - 2) + m^3(q - 2) + (q - 2) \\ &= (q - 2)(q^2 + m^3 + 1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Simplifique a expressão* $\dfrac{a^4 - 5a^3 + 3a - 15}{a^3 - 125}$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} a^4 - 5a^3 + 3a - 15 &= (a^4 - 5a^3) + (3a - 15) \\ &= a^3(a - 5) + 3(a - 5) \\ &= (a - 5)(a^3 + 3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a^3 - 125 &= a^3 - 5^3 \\ &= (a-5)(a^2 + a \cdot 5 + 5^2) \\ &= (a-5)(a^2 + 5a + 25). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{a^4 - 5a^3 - 3a + 15}{a^3 - 125} &= \frac{\cancel{(a-5)}(a^3+3)}{\cancel{(a-5)}(a^2+5a+25)} \\ &= \frac{a^3+3}{a^2+5a+25}. \end{aligned}$$

□

Como no exemplo 6, utilizamos, no exemplo a seguir, o artifício de somar e subtrair parcelas que, originalmente, não apareciam na expressão a ser fatorada.

Exemplo 15. *Encontre uma forma fatorada para a expressão algébrica* $S = p^5 + p^4 + 1$.

Solução. Adicionando e subtraindo as parcelas p^3, p^2 e p a S e depois agrupando, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= p^5 + p^4 + (p^3 - p^3) + (p^2 - p^2) + (p - p) + 1 \\ &= p^5 + p^4 + p^3 - p^3 - p^2 - p + p^2 + p + 1 \\ &= p^3(p^2 + p^2 + 1) - p(p^2 + p + 1) + (p^2 + p + 1) \\ &= (p^2 + p + 1)(p^3 - p + 1). \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para cada uma das seções que compõem esta aula. Uma boa compreensão da seção 1 é fundamental para o desenvolvimento das demais. Por isso, é importante que seja dada uma atenção especial a tal seção. Na seção 2, é fundamental que os alunos aprendam a reconhecer um produto notável dentre os termos que compõem uma expressão algébrica inteira.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. V. Litivinenko e A. Mordkovitch. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry* . Moscou, Editora MIR, 1984.