Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Produtos Notáveis e Fatorações - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de julho de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos apresentando exercícios variados envolvendo produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas.

Exemplo 1. *Prove a validade da **identidade de Euler**[1]:*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2.$$

Solução. Desenvolvendo o lado direito da identidade, obtemos:

$$\begin{aligned}(ad-bc)^2+(ac+bd)^2 &= (ad)^2-2(ad)(bc)+(bc)^2\\ &\quad+(ac)^2+2(ac)(bd)+(bd)^2\\ &= a^2d^2-\cancel{2abcd}+b^2c^2\\ &\quad+a^2c^2+\cancel{2abcd}+b^2d^2\\ &= a^2d^2+a^2c^2+b^2c^2+b^2d^2\\ &= a^2\left(d^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+d^2\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).\end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Mostre que a soma do produto de quaisquer quatro números inteiros consecutivos com uma unidade é um quadrado perfeito.*

Solução. Sejam n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$ quatro inteiros consecutivos. Veja que

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1\\ &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+2n+n+2\right)+1\\ &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1.\end{aligned}$$

[1]Leonhard Euler foi um matemático suíço do século XVIII, até hoje considerado um dos maiores matemáticos da História.

Agora, denotando $N = n^2 + 3n$, obtemos:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= \left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1 \\ &= N(N+2)+1 \\ &= N^2+2N+1 \\ &= (N+1)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3 (OBM). *Sendo a, b e c reais tais que $ab(a+b+c) = 1001$, $bc(a+b+c) = 2002$ e $ac(a+b+c) = 3003$. Encontre o valor de abc.*

Solução. Temos:

$$ab(a+b+c) = 1001 \iff abc(a+b+c) = 1001c,$$

$$bc(a+b+c) = 2002 \iff abc(a+b+c) = 2002a = 2 \cdot 1001a$$

e

$$ac(a+b+c) = 3003 \iff abc(a+b+c) = 3003b = 3 \cdot 1001b.$$

Logo,

$$abc(a+b+c) = 1001c$$

$$\frac{abc(a+b+c)}{2} = 1001a$$

e

$$\frac{abc(a+b+c)}{3} = 1001b.$$

Somando membro a membro as últimas três equações, obtemos

$$\begin{aligned} & abc(a+b+c) + \frac{abc(a+b+c)}{2} + \frac{abc(a+b+c)}{3} = \\ & = 1001c + 1001a + 1001b \\ \iff & abc(a+b+c)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 1001(c+a+b). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$ab(a+b+c) = 1001 \Longrightarrow a+b+c \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & abc(a+b+c)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 1001(c+a+b) \\ \iff & abc(\cancel{a+b+c}) \cdot \frac{11}{6} = 1001(\cancel{a+b+c}) \\ \iff & abc = 1001 \cdot \frac{6}{11} = 546. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4. *Sejam a, b, c e d reais tais que*

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 = 4(ab+bc+cd).$$

Mostre que $a = b = c = d$.

Solução. Observando que

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 4xy &= x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= (x-y)^2, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} &(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 - 4(ab+bc+cd) = \\ &= [(a+b)^2 - 4ab] + [(b+c)^2 - 4bc] + [(c+d)^2 - 4cd] \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 = 0,$$

de forma que $a - b = 0$, $b - c = 0$ e $c - d = 0$. Assim, $a = b = c = d$. $\square$

Exemplo 5. *Se a, b e c são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, prove que*

$$-\frac{1}{2} \leq ab + ac + bc \leq 1.$$

Solução. Observe que

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0 \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0\\
&\Longrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc\\
&\Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 \geq 0 \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 0\\
&\Longrightarrow\ 2(ab + ac + bc) \geq -\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\\
&\Longrightarrow\ ab + ac + bc \geq -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Daí segue que

$$ab + ac + bc \geq -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

$\square$

Exemplo 6 (OBM). *Assinale a opção que corresponde ao valor da expressão*

$$\frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2}.$$

(a) 1006.

(b) 1007.

(c) 1008.

(d) 2014.

(e) 2015.

Solução. Utilizando o produto notável

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2015^3 - 1^3 &= (2015-1)(2015^2 + 2015 \cdot 1 + 1^2) \\ &= 2014 \cdot \left(2015^2 + 2016\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2016^2 = (2015+1)^2 = 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1,$$

logo,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2015^2 + 2016^2 &= 1 + 2015^2 + 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1 \\ &= 2 \cdot 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 2 \\ &= 2\left(2015^2 + 2015 + 1\right) \\ &= 2\left(2015^2 + 2016\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} &= \frac{2014 \cdot \left(2015^2 + 2016\right)}{2\left(2015^2 + 2016\right)} \\ &= \frac{2014}{2} \\ &= 1007. \end{aligned}$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 7 (OBM). *Calcule o valor do real positivo b, sabendo que a equação*

$$\left(4^2 + b^2\right)x^2 - 26bx + \left(b^2 + 9^2\right) = 0$$

tem raízes iguais.

Solução 1. Observe que

$$\begin{aligned} &\left(4^2 + b^2\right)x^2 - 26bx + \left(b^2 + 9^2\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 4^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot x^2 - 8bx - 18bx + b^2 + 9^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & b^2 - 2 \cdot b \cdot 4x + (4x)^2 + (bx)^2 - 2 \cdot bx \cdot 9 + 9^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (b-4x)^2 + (bx-9)^2 = 0. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que existe x real que é solução da equação do enunciado, obtemos $b - 4x = 0$ e $bx - 9 = 0$. Mas $x \neq 0$, pois, caso contrário, obteríamos $b^2 + 9^2 = 0$, o que é impossível. Portanto, $b = 4x = \frac{9}{x}$ e, daí,

$$b^2 = 4\cancel{x} \cdot \frac{9}{\cancel{x}} = 36 \Longrightarrow b = 6.$$

$\square$

Solução 2. Alternativamente, a fim de que a equação de segundo grau do enunciado tenha raízes iguais, seu discriminante deve ser igual a 0. Portanto,

$$26^2 b^2 = 4(4^2 + b^2)(b^2 + 9^2)$$

ou, o que é o mesmo,

$$b^4 - 72b^2 + 36^2 = 0.$$

Por sua vez, a última equação acima é o mesmo que

$$(b^2 - 36)^2 = 0,$$

de sorte que $b^2 = 36$ e, daí, $b = 6$. $\square$

Exemplo 8 (OBM - adaptado). *Quantos são os pares de inteiros positivos* (x,y) *que satisfazem a equação* $x^2 - y^2 = 2^{2021}$*?*

(*a*) 1007.

(*b*) 1008.

(*c*) 1009.

(*d*) 1010.

(*e*) 1011.

Solução. Veja que

$$x^2 - y^2 = 2^{2021} \iff (x-y)(x+y) = 2^{2021}.$$

Desse modo, devemos ter $x - y = 2^a$ e $x + y = 2^b$, com a e b inteiros não negativos tais que $a + b = 2021$. Somando e subtraindo membro a membro as equações do sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 2^a \\ x + y = 2^b \end{cases},$$

obtemos

$$2x = 2^b + 2^a \iff x = 2^{b-1} + 2^{a-1}$$

e

$$2y = 2^b - 2^a \iff y = 2^{b-1} - 2^{a-1}.$$

Assim, para que as soluções de $x^2 - y^2 = 2^{2021}$ sejam pares de inteiros positivos, a e b devem ser inteiros tais que $1 \leq a < b$. Como $a + b = 2021$, os possíveis pares (a,b) são

$$(1{,}2020),(2{,}2019),(3{,}2018),\ldots,(1010{,}1011).$$

Portanto, há 1010 pares de inteiros positivos (x,y) que satisfazem a equação $x^2 - y^2 = 2^{2021}$, e a alternativa correta é a letra **(d)**. $\square$

Exemplo 9 (OBM). *Considere o trinômio do segundo grau* $p(x) = x^2 - x + 1$.

(a) *Calcule o número de soluções reais distintas da equação* $p(x^2) = x^2$, *isto é,*

$$\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right) + 1 = x^2.$$

(b) *Calcule o número de soluções reais distintas da equação*

$$p(p(x)) = p(x).$$

Solução.
(a) Veja que

$$\begin{aligned}\left(x^2\right)^2-\left(x^2\right)+1=x^2 &\iff \left(x^2\right)^2-2\left(x^2\right)+1=0\\ &\iff \left(x^2-1\right)^2=0\\ &\iff x^2-1=0\\ &\iff (x+1)(x-1)=0\\ &\iff x=\pm 1.\end{aligned}$$

Logo, a equação $p(x^2)=x^2$ possui exatamente duas soluções reais distintas.

(b) Fazendo $y=p(x)$, temos:

$$\begin{aligned}p(p(x))=p(x) &\iff p(y)=y\\ &\iff y^2-y+1=y\\ &\iff y^2-2y+1=0\\ &\iff (y-1)^2=0\\ &\iff y=1.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}y=1 &\iff p(x)=1\\ &\iff x^2-x+1=1\\ &\iff x^2-x=0\\ &\iff x(x-1)=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=1.\end{aligned}$$

Assim, a equação $p(p(x))=p(x)$ também possui duas raízes reais distintas. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É importante que os alunos memorizem as fórmulas para os vários produtos notáveis e fatorações, pois assim os cálculos ficam mais simples e os erros diminuem. Isso deve acontecer de forma natural, à medida que eles fizerem uma boa quantidade de exercícios. Entretanto, enquanto esse processo não estiver completo, vale a pena deduzir as fórmulas novamente. Como na aula anterior, ressalte a diferença entre "quadrado de uma soma" e "soma de quadrados", "cubo de uma soma" e "soma de cubos", etc.

A referência a seguir contém uma discussão completa de produtos notáveis e fatorações, assim como vários outros exercícios envolvendo tais temas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.