Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Ângulos - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

1 Submúltiplos do grau

Na aula anterior, apresentamos o grau como unidade de medida para ângulos, definindo que um ângulo de 1^o corresponde a um arco cuja medida é $\frac{1}{360}$ do comprimento de um círculo. Pela necessidade de medir ângulos cujas medidas não sejam múltiplos inteiros do grau, introduzimos a seguir ângulos cujas medidas são submúltiplos do grau.

Um ângulo de **1 minuto** é um ângulo cuja medida é $\frac{1}{60}$ da medida de um ângulo de 1^o. Escrevemos

$$1' = \frac{1}{60} \times 1^o$$

ou, ainda,

$$1^o = 60'.$$

Temos, então, a seguinte regra:

> Se quisermos transformar a medida de um ângulo, que é dada em minutos, para graus, devemos dividir a quantidade de minutos por 60; o quociente dessa divisão será a quantidade de graus correspondentes. Se quisrmos fazer a transformação inversa, ou seja, de graus para minutos, devemos multiplicar a quantidade de graus por 60; o produto dessa multiplicação será a quantidade de minutos correspondentes.

Dizemos que um ângulo mede **1 segundo** se sua medida é $\frac{1}{60}$ da medida de um ângulo de $1'$. Neste caso, escrevemos

$$1'' = \frac{1}{60} \times 1' = \frac{1}{3600} \times 1^o$$

ou, ainda,

$$1' = 60'' \text{ e } 1^o = 3600''.$$

Temos, então, a regra geral a seguir:

> Se quisermos transformar a medida de um ângulo, que é dada em segundos, para minutos (resp. graus), devemos dividir a quantidade de segundos por 60 (resp. 3600). Por outro lado, para transformar a medida de um ângulo dada em minutos (resp. graus) para segundos, multiplicamos a quantidade de minutos (resp. graus) por 60 (resp. 3600).

Observação 1. *Existem outras unidades de medida de ângulos utilizadas com certa frequência, como o* ***grado*** *(abreviamos* gr*), que vale $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto, e o* ***radiano*** *(abreviamos* rad*), que corresponde, em um círculo, a um arco cuja medida é igual à do raio.*

Na figura 1 temos que $A\widehat{O}B = 90^o = 100\,\text{gr}$ e, na figura 1, temos

$$A\widehat{O}B = 1\,\text{rad} \cong 57,296^o.$$

Observe que, na figura 1, o ponto A é obtido quando enrolamos *o segmento vertical vermelho ao longo do círculo, de forma que (conforme lá indicado) o comprimento do arco $\widehat{AB}$ em vermelho seja exatamente igual ao raio r do círculo.*

Conforme veremos em aulas posteriores, a medição de ângulos em radianos é particularmente útil no estudo da Trigonometria, assunto que, dentre outras, tem várias aplicações interessantes e importantes à Geometria Plana.

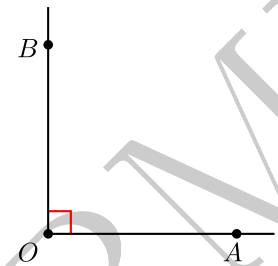


Figura 1: um ângulo de 100 gr.

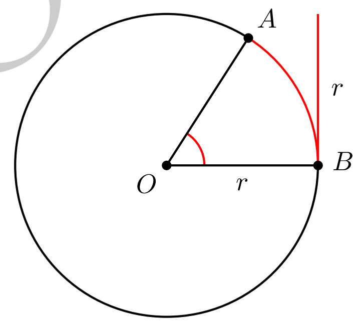


Figura 2: um ângulo de 1 rad.

A seguir, colecionamos alguns exemplos, no sentido de exercitar as operações de conversões de ângulos.

Exemplo 2. *Simplificando a medida $28^o150'925''$, obtemos:*

(a) $29^o55'15''$.

(b) $31^o55'25''$.

(c) $31^o45'25''$.

(d) $30^o45'25''$.

(e) $30^o25'45''$.

Solução. Primeiramente, observe que, para transformar $925''$ em minutos, devemos dividir 925 por 60, pois $1' = 60''$. obtemos, assim:

$$925'' = 15 \times 60'' + 25'' = 15'25''.$$

Daí, segue que

$$28^{\circ}150'925'' = 28^{\circ}(150+15)'25'' = 28^{\circ}165'25''.$$

Agora, para transformar $165'$ em graus, dividimos novamente por 60, pois $1^{\circ} = 60'$. Então, temos:

$$165' = 2 \times 60' + 45' = 2^{\circ}45',$$

de forma que

$$\begin{aligned} 28^{\circ}150'925'' &= 28^{\circ}165'25'' = (28+2)^{\circ}45'25'' \\ &= 30^{\circ}45'25''. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é o item (d). □

Exemplo 3. *Escrevendo a medida $86,12^{\circ}$ utilizando os submúltiplos do grau, obtemos:*

(a) $86^{o}7'12''$.

(b) $86^{o}6'52''$.

(c) $86^{o}8'42''$.

(d) $86^{o}5'12''$.

(e) $86^{o}7'22''$.

Solução. Começamos observando que $86,12^{\circ} = 86^{\circ} + 0,12^{\circ}$. Agora, como $1^{\circ} = 3600''$, temos

$$0,12^{\circ} = 0,12 \times 3600'' = 432''.$$

Dividindo $432''$ por 60, obtemos

$$432'' = 7 \times 60'' + 12'' = 7'12'',$$

e concluímos que $86,12^{\circ} = 86^{\circ}7'12''$. □

Exemplo 4. *Calcule o valor da soma*

$$34^{o}245'290'' + 57^{o}387'743'',$$

simplificando o resultado.

Solução. O primeiro passo é somar as medidas em graus, minutos e segundos. Então, como $34^{\circ} + 57^{\circ} = 91^{\circ}$, $245' + 387' = 632'$ e $290'' + 743'' = 1033''$, obtemos:

$$34^{\circ}245'290'' + 57^{\circ}387'743'' = 91^{\circ}632'1033''.$$

O próximo passo é simplificar a medida $91^{\circ}632'1033''$. Para isso, começamos notando que

$$1033'' = 17 \times 60'' + 13'' = 17'13''.$$

Daí,

$$632'1033'' = 649'13''.$$

Agora observe que

$$649' = 10 \times 60' + 49' = 10^{\circ}49'.$$

Logo, obtemos:

$$91^{\circ}632'1033'' = 91^{\circ}649'13'' = 101^{\circ}49'13'',$$

e, portanto,

$$34^{\circ}245'290'' + 57^{\circ}387'743'' = 101^{\circ}49'13''.$$

□

Exemplo 5. *Calcule a medida de um ângulo α que corresponde a $\frac{1}{8}$ da medida de um ângulo reto.*

Solução. Sabemos que um ângulo reto mede 90°. Assim,

$$\alpha = \frac{1}{8} \times 90^{\circ} = 11,25^{\circ}.$$

Mas, como

$$0,25^{\circ} = 0,25 \times 60' = 15',$$

temos

$$\alpha = 11,25^{\circ} = 11^{\circ} + 0,25^{\circ} = 11^{\circ}15'.$$

□

Exemplo 6. *Explique, com justificativa, se um ângulo $\alpha = 256989''$ é agudo, reto ou obtuso.*

Solução. Sabemos que $1^{\circ} = 60' = 3600''$. Daí, dividindo 256989 por 3600, obtemos:

$$256989'' = 71 \times 3600'' + 1389''.$$

Então, obviamente, temos

$$71^{\circ} < \alpha < 72^{\circ},$$

de sorte que α é um ângulo agudo.

Se quisermos determinar o valor de α em graus, minutos e segundos, devemos transformar $1389''$ em minutos. Para tanto, dividindo 1389 por 60, obtemos

$$1389'' = 23 \times 60'' + 9'' = 23'9'',$$

e segue que

$$\alpha = 256989'' = 71^{\circ}23'9''.$$

□

Exemplo 7. *Multiplicando a medida do ângulo $\alpha = 23^{o}46'19''$ por cinco, obtém-se:*

(a) $117^{o}52'25''$.

(b) $118^{o}51'35''$.

(c) $119^{o}52'35''$.

(d) $118^{o}51'25''$.

(e) $117^{o}51'35''$.

Solução. Multiplicando as medidas de graus, minutos e segundos diretamente por 5, obtemos:

$$5\alpha = 115^\circ 230' 95''.$$

Agora,

$$95'' = 1 \times 60'' + 35'' = 1'35'',$$

de modo que

$$5\alpha = 115^\circ 230' 95'' = 115^\circ 231' 35''.$$

Por outro lado,

$$231' = 3 \times 60' + 51' = 3^\circ 51',$$

e obtemos

$$5\alpha = 115^\circ 231' 35'' = 118^\circ 51' 35''.$$

Assim, a alternativa correta é o item (e). □

Exemplo 8. *Na figura abaixo, temos $A\widehat{O}C = 5x - 16^o$ e $B\widehat{O}C = x + 15^o$. Se $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $\angle AOC$, qual é o valor de x?*

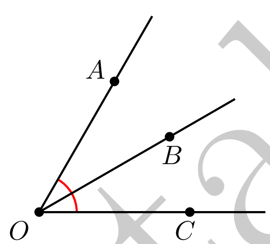
(a) $x = 15^o 30'$.

(b) $x = 15^o 33'$.

(c) $x = 16^o 20'$.

(d) $x = 16^o 40'$.

(e) $x = 15^o 20'$.



Solução. Como $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de $\angle AOC$, temos que

$$\begin{aligned} A\widehat{O}C = 2B\widehat{O}C &\Longrightarrow 5x - 16^\circ = 2(x + 15^\circ) \\ &\Longrightarrow 5x - 16^\circ = 2x + 30^\circ \\ &\Longrightarrow 3x = 46^\circ \\ &\Longrightarrow x = \frac{1}{3} \times 46^\circ. \end{aligned}$$

Mas, como $46^\circ = 45^\circ 60'$, concluímos que

$$x = 45^\circ 60' \div 3 \Longrightarrow x = 15^\circ 20'.$$

□

Exemplo 9. *Qual é o complementar do ângulo $\alpha = 38^o 25' 13''$?*

(a) $61^o 34' 47''$.

(b) $61^o 35' 13''$.

(c) $62^o 35' 47''$.

(d) $62^o 34' 13''$.

(e) $62^o 34' 47''$.

Solução. O complementar de α é o ângulo β que satisfaz

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

ou seja,

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 38^\circ 25' 13''.$$

Para efetuar esse cálculo, escrevemos

$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ 59' 60'',$$

de modo que

$$\beta = 89^\circ 59' 60'' - 38^\circ 25' 13'' = 61^\circ 34' 47''.$$

Portanto, a alternativa correta é o item (a). □

Exemplo 10. *Ao subtrairmos 35^o do triplo do complementar de um ângulo, obtemos o prórpio ângulo. A medida desse ângulo é, então, de:*

(a) $57^o 30'$.

(b) $57^o 45'$.

(c) $57^o 15'$.

(d) $58^o 45'$.

(e) $58^o 15'$.

Solução. Denotando o ângulo em questão por α, temos que

$$\begin{aligned} 3(90^\circ - \alpha) - 35^\circ = \alpha &\Longrightarrow 270^\circ - 3\alpha - 35 = \alpha \\ &\Longrightarrow 4\alpha = 235^\circ \\ &\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \times 235^\circ = 58,75^\circ. \end{aligned}$$

Agora, observe que $0,75^\circ = 0,75 \cdot 60' = 45'$. Portanto,

$$\alpha = 58^\circ 45',$$

e a alternativa correta é o item (d). □

Ângulos e Coordenadas Geográficas

Historicamente, a necessidade da medição de ângulos utilizando minutos e segundos deveu-se à sua utilização, séculos atrás, em **cartas de navegação**, como o propósito de os navegadores marcarem suas posições nos oceanos da Terra o mais acuradamente possível.

Recordamos que navegadores e exploradores localizavam-se sobre a superfície da Terra utilizando as **coordenadas geográficas**, comumente denominadas **Latitude** e **Longitude**. Na figura[1] 3, à esquerda, vemos marcados os 180 *paralelos de Latitude*, variando de -90° a $+90^\circ$, sendo que o paralelo de 0° corresponde à **linha do Equador**. Observe que cada paralelo de Latitude corresponde, sobre a superfície da Terra, a um círculo paralelo ao círculo que representa a linha do Equador. Na figura 3, à direita, vemos marcados os 360 *meridianos de Longitude*, variando de -180° a $+180^\circ$, sendo que o meridiano de 0° corresponde ao *meridiano de Greenwich* (que é simplesmente o meridiano que contém uma linha específica, marcada nos arredores do Observatório Real de Greenwich, em Londres). Cada meridiano de Longitude corresponde, sobre a superfície da Terra, a um semicírculo tendo suas extremidades nos polos Norte e Sul.

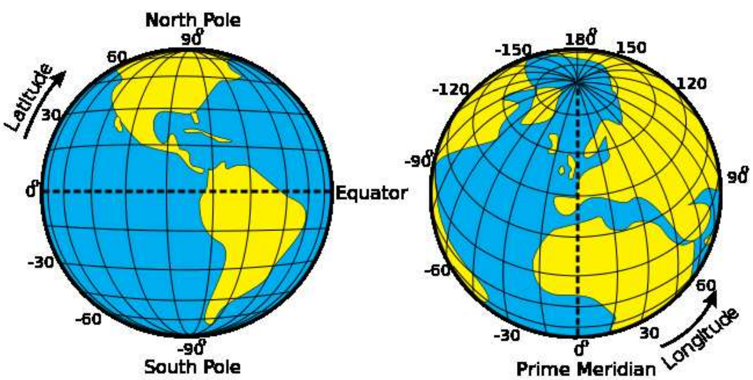


Figura 3: medindo Latitude e Longitude.

Assim, alguém cujas coordenadas geográficas são 15° de *Latitude Sul* e 47° de *Longitude Oeste*, pode marcar sua posição em um globo terrestre como igual à interseção do paralelo -15° com o meridiano de -47°, e estará situado em algum ponto do Distrito Federal.

É, agora, fácil entender porque os precursores da exploração de nosso planeta sentiram a necessidade de utilizar minutos e segundos na medição de ângulos. Para tanto, comecemos observando que a circunferência da Terra mede aproximadamente 40030km. Portanto, se um navio, situado sobre a linha do Equador, se desloca de 1° no sentido Oeste-Leste ou no sentido Sul-Norte, ele se desloca cerca de 111km. Por outro lado, se o navio se desloca $1''$ no sentido Oeste-Leste ou no sentido Sul-Norte, ele se desloca cerca de 30m. De outra forma, um erro de $0{,}5^\circ$ nas coordenadas geográficas desse navio implicará num erro de cerca de 111km em sua localização, ao passo que um erro de $0{,}5''$ implicará num erro de cerca de 30m em sua localização!

[1] By Djexplo (own work), via Wikimedia Commons.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir a teoria e resolver os exercícios que compõem esse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.