**Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana Parte 2**

# Triângulos

**Oitavo Ano**

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**14 de maio de 2016**



PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Intrudução

Recordamos que dados três pontos não colineares $A$, $B$ e $C$ no plano, o **triângulo** $ABC$ é a união dos três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ (veja a Figura 1). Os pontos $A$, $B$ e $C$ são os **vértices**, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os **lados** e os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são os **ângulos internos** do triângulo $ABC$. Quando não houver perigo de confusão, as medidas dos ângulos internos de um triângulo $ABC$ serão denotadas simplesmente por $B\widehat{A}C = \widehat{A}$, $A\widehat{B}C = \widehat{B}$ e $A\widehat{C}B = \widehat{C}$.

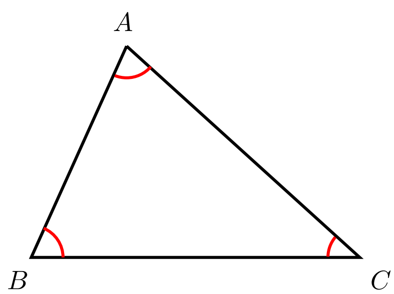


Figura 1: um triângulo $ABC$ qualquer.

Agora, conforme mostrado na Figura 2, tomemos pontos $D$, $E$ e $F$, respectivamante, sobre as semirretas $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Os ângulos $\angle DAC$, $\angle ABE$ e $\angle BCF$ são três dos **ângulos externos** do triângulo $ABC$. Observe que, além dos ângulos externos mostrados na Figura 2, o triângulo $ABC$ tem outros três angulos externos, os quais são OPV aos ângulos externos mostrados na figura. (Sugerimos ao leitor, nesse momento, parar por um instante e, à guisa de exercício, marcar esses três outros ângulos externos.)

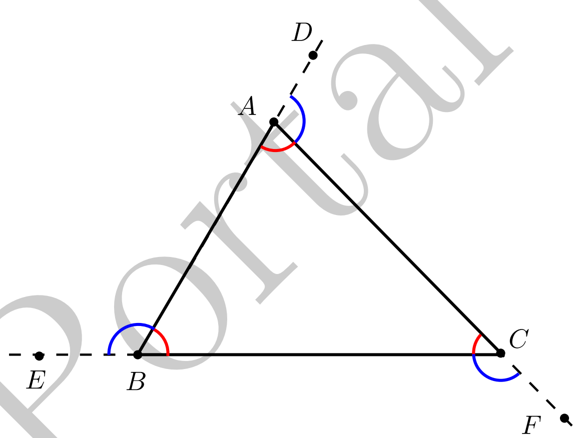


Figura 2: ângulos de um triângulo qualquer.

Definimos, ainda, o **interior** de um triângulo $ABC$ como o interior da região convexa do plano delimitada pelos seus lados. Dessa forma, o **exterior** de $ABC$ é definido como o complementar da reunião entre o seu interior e o próprio triângulo $ABC$. (Veja a Figura 3.)

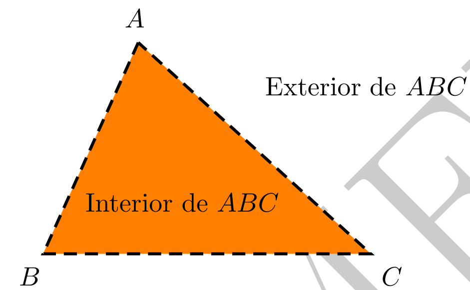


Figura 3: interior e exterior de um triângulo.

# 2 Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos internos. Quanto aos lados, temos a seguinte classificação:

Um triângulo $ABC$ é **equilátero** se

$$AB = AC = BC.$$

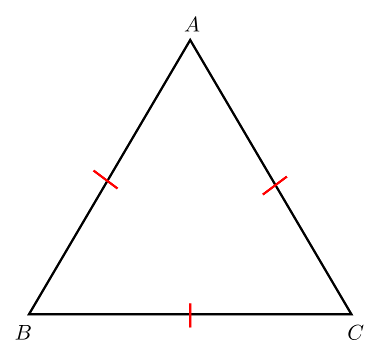


Figura 4: um triângulo equilátero $ABC$.

Um triângulo $ABC$ é **isósceles** se

$$AB = AC \text{ ou } AB = BC \text{ ou } AC = BC.$$

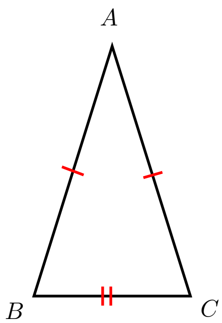


Figura 5: um triângulo isósceles $ABC$.

Um triângulo $ABC$ é **escaleno** se

$$AB \neq BC, \;\; AC \neq BC \text{ e } AB \neq AC.$$

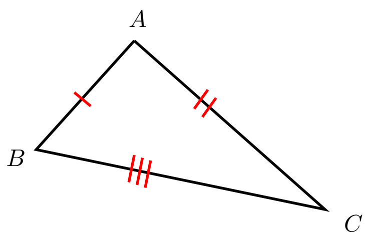


Figura 6: um triângulo escaleno $ABC$.

Observe que a definição de triângulo isósceles não exclui a possibilidade de que os três lados do triângulo sejam iguais. De outra forma, quando escrevemos "$AB = AC$ ou $AB = BC$ ou $AC = BC$", não estamos dizendo nada, em cada caso, sobre o comprimento do terceiro lado (que pode, ou não, ser igual ao comprimento dos outros dois lados). Assim, para triângulos isósceles, pede-se que *pelo menos* dois lados tenham comprimentos iguais, de forma que

**Todo triângulo equilátero é isósceles.**

Por outro lado, no caso de triângulos escalenos, pede-se que os três lados do triângulo tenham comprimentos dois a dois distintos.

A fim de classificar os triângulos em relação às medidas de seus ângulos internos, observemos inicialmente que, conforme comentado em aula anterior (veja o pé da segunda coluna da página 4 do material teórico "Retas Cortadas por uma Transversal", no Módulo "Elementos Básicos de Geometria Plana I"), temos que

**A soma dos ângulos internos de todo triângulo é igual a 180°.**

Portanto, se $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ denotam as medidas dos ângulos internos de um triângulo $ABC$, então no máximo um dentre $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ pode ser maior ou igual a $90^\circ$. De fato, se fossem $\widehat{A} \geq 90^\circ$ e $\widehat{B} \geq 90^\circ$, por exemplo, teríamos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A} + \widehat{B} \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

contradizendo a propriedade destacada acima.

Graças à discussão acima, a classificação dos triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos contempla somente os seguintes casos:

Um triângulo é **acutângulo** se seus três ângulos internos são agudos, ou seja, se seus três ângulos internos medem menos que 90º.

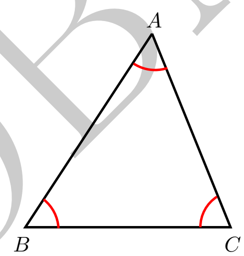


Figura 7: um triângulo acutângulo $ABC$.

Um triângulo é **obtusângulo** se possui um ângulo obtuso, isto é, se um de seus ângulos internos tem medida maior do que 90º.

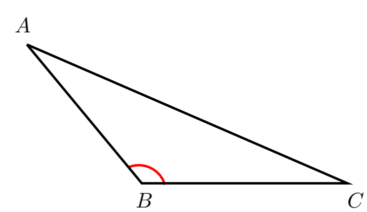


Figura 8: um triângulo obtusângulo $ABC$.

Um triângulo é **retângulo** se possui um ângulo interno reto, ou seja, se possui um ângulo interno cuja medida é igual a 90º.

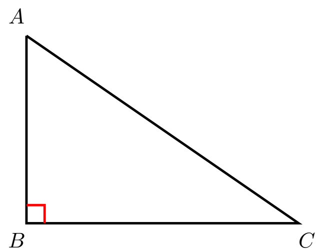


Figura 9: um triângulo retângulo $ABC$.

# 3 Congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são **congruentes** se é possível sobrepô-los através de movimentos rígidos no espaço, sem deformá-los. Então, quando dois triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são congruentes, é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, tal que:

(i) os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;

(ii) os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

A Figura 10 mostra dois triângulos congruentes $ABC$ e $A'B'C'$, através da correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A', \;\; B \leftrightarrow B', \;\; C \leftrightarrow C'.$$

Assim, conforme o item (i) acima, temos

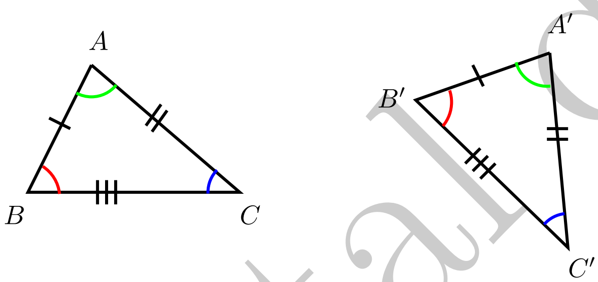


Figura 10: dois triângulos congruentes.

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

e

$$BC = B'C', \quad AC = A'C', \quad AB = A'B'.$$

Doravante, em prol da simplificação do discurso e sempre que não houver perigo de confusão, diremos que segmentos (resp. ângulos) que possuem um mesmo comprimento (resm. uma mesma medida) são *iguais*.

A seguir, enunciaremos (sem demonstração) alguns conjuntos de critérios mínimos que permitem estabelecer a congruência de dois triângulos dados. Tais critérios são conhecidos como **casos de congruência de triângulos**.

Caso **LAL**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois dos lados de um deles e o ângulo interno formado por esses dois lados sejam respectivamente iguais aos dois lados correspondentes no outro triângulo e ao ângulo formado por esses outros dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Na Figura 11, temos $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Então, pelo caso LAL, os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são congruentes. Observe, então, que a correspondência de

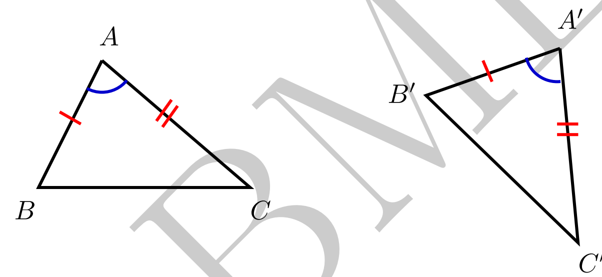


Figura 11: o caso de congruência LAL.

vértices da congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, o que fornece as igualdades adicionais $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e $BC = B'C'$.

Caso **ALA**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados de um deles e os ângulos adjacentes a esse lado sejam respectivamente iguais ao lado correspondente no outro triângulo e aos ângulos adjacentes a esse outro lado, então os dois triângulos são congruentes.

A figura 12 ilustra esse segundo caso de congruência. Nela, temos $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $AB = A'B'$. Portanto, os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso ALA. Novamente aqui, a correspondência de vértices da

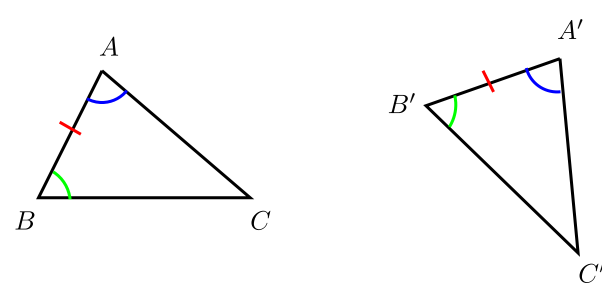


Figura 12: o caso de congruência ALA.

congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, fornecendo as igualdades adicionais $\widehat{C} = \widehat{C'}$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$.

Caso **LLL**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os três lados de um deles sejam respectivamente iguais aos lados correspondentes no outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Nas notações da Figura 13, temos $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$. Logo, os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL. Aqui, uma vez mais

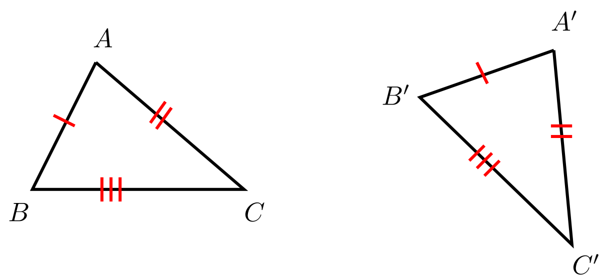


Figura 13: o caso de congruência LLL.

a correspondência de vértices da congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, e fornece as igualdades $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$ entre as medidas dos ângulos dos dois triângulos.

A seguir, ilustramos a aplicação de alguns dos casos de congruência listados acima utilizando-os para obter alguns resultados importantes sobre triângulos isósceles e equiláteros.

**Proposição 1.** *Se $ABC$ é um triângulo isósceles com $AB = AC$, então $\widehat{B} = \widehat{C}$.*

**Prova.** Seja $M$ o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Em relação aos triângulos $ABM$ e $ACM$, temos que $BM = CM$ (pois ambos são iguais a $\frac{1}{2} \cdot BC$), $AB = AC$ (por hipótese) e o lado $AM$ é comum (veja a Figura 14). Portanto, esses dois triângulos são congruentes pelo caso de congruência LLL, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow C, \quad M \leftrightarrow M.$$

Em particular, segue daí que $\widehat{B} = \widehat{C}$. □

O caso de congruência ALA nos garante que a recíproca da proposição anterior também é válida:

**Proposição 2.** *Se dois dos ângulos de um triângulo são congruentes, então ele é isósceles.*

**Prova.** Seja $ABC$ um triângulo tal que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Então, utilizando a correspondência

$$A \leftrightarrow A, \; B \leftrightarrow C, \; C \leftrightarrow B,$$

temos que $ABC$ e $ACB$ são triângulos conguentes, pelo caso ALA. Daí, segue que $AB = AC$. □

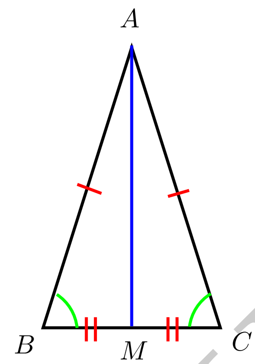


Figura 14: ângulos da base de um triângulo isósceles.

**Observação 3.** *Não há nada estranho com o argumento apresentado na prova da proposição anterior. Visto em termos de movimentos rígidos, ele simplesmente garante que podemos mover $ABC$ no espaço, sem deformá-lo (e até mantendo o vértice $A$ fixo, se assim desejarmos), até que o vértice $B$ coincida com o vértice $C$, e vice-versa. Sugerimos ao leitor parar por um momento e tentar visualizar mentalmente um tal movimento rígido.*

Quando o triângulo $ABC$ é isósceles, com $AB = BC$, dizemos que o lado $BC$ é a **base** de $ABC$. Os dois resultados discutidos acima nos dizem, então, que um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos internos adjacentes à base são iguais.

Como caso particular da discussão do parágrafo anterior, se $ABC$ é um triângulo equilátero, podemos ver qualquer um dos lados $AB$, $AC$ ou $BC$ como base de $ABC$. Então, segue da Proposição 1 que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$; como já sabemos que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, obtemos o resultado a seguir.

**Corolário 4.** *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a $60°$.*

No que segue, apresentamos um quarto caso de congruência útil.

Caso **LAAo**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados, um dos ângulos a ele adjacentes e o ângulo oposto a esse lado em um dos triângulos sejam respectivamente iguais, mediante tal correspondência, a um lado no outro triângulo, a um ângulo adjacente a esse lado e ao ângulo oposto a esse lado, então os dois triângulos são congruentes.

Na Figura 15, temos $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Logo, os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são congruentes por LAAo, mediante a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Portanto, obtemos as igualdades adicionais $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

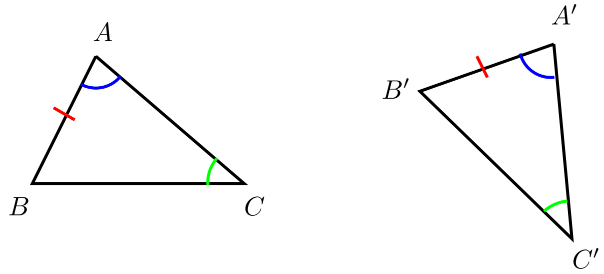


Figura 15: o caso LAAo.

É instrutivo observar que a validade do caso de congruência LAAo decorre imediatamente da validade do caso ALA, juntamente com o fato de que a soma dos ângulos de todo triângulo é igual a 180°.

Para entender porque, suponhamos que os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ satisfaçam um conjunto de condições do tipo LAAo, digamos, $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Então,

$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = \widehat{B}',$$

de forma que os dois triângulos também satisfazem o conjunto de condições ALA $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $AB = A'B'$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

Assim, o leitor deve perceber o caso LAAo como um *atalho*, que permite concluir a congruência de dois triângulos que o verifiquem sem a necessidade de, antes, operar um argumento como o do parágrafo anterior para poder utilizar o caso ALA.

**Observação 5.** *Ainda em relação aos casos de congruência apresentados aqui, observamos para o leitor interessado que o capítulo* 2 *da referência [1] discute construções com régua e compasso que servem de argumentos heurísticos para explicar porque tais conjuntos de critérios realmente estabelecem a "igualdade" de dois triângulos que os satisfaçam. Por outro lado, na referência [2] o caso LAL é assumido como axioma de congruência de triângulos, sendo mostrado rigorosamente que os casos ALA e LLL decorrem dele como teoremas.*

## Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir as seções 1 e 2, e outras duas sessões de 50min para a Seção 3. Na Seção 3, ressalte que os critérios de congruência de triângulos são dispositivos que permitem concluir a congruência de dois triângulos sem que haja a necessidade de verificar se, nos dois triângulos, todos os lados e os ângulos correspondentes a esses lados são congruentes. Ressalte também os resultados que versam sobre a congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles e a congruência dos três ângulos internos de um triângulo equilátero, pois eles serão úteis nos próximos módulos.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.