Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3

Paralelogramos Especiais

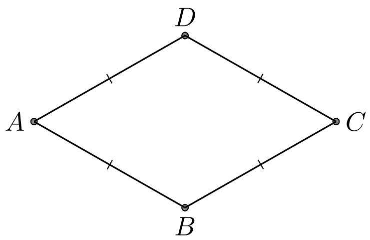
Oitavo ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

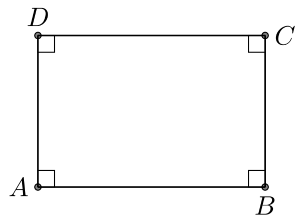
1 Paralelogramos especiais

Dentre os quadriláteros notáveis, os losangos, retângulos e quadrados são os que têm mais propriedades interessantes. Eles serão objetos de estudo neste tópico.

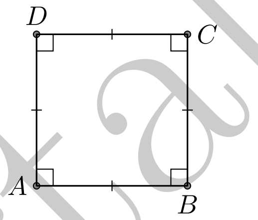
Um quadrilátero convexo é um **losango** se todos os seus lados são congruentes. Uma vez que, em um losango, os pares de lados opostos são formados por segmentos congruentes, concluímos que todo losango é, em particular, um paralelogramo.



Um quadrilátero convexo é um **retângulo** se todos os seus ângulos são retos. Dessa forma, todo retângulo possui ângulos consecutivos (ou opostos) suplementares; assim, todo retângulo também é um exemplo particular de paralelogramo.



Um **quadrado** é um quadrilátero em que todos os lados são congruentes e todos os ângulos são retos. Dessa forma, todo quadrado é ao mesmo tempo um losango e retângulo.



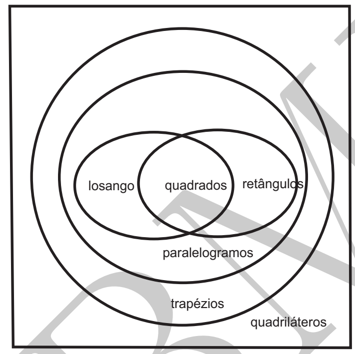
Pela discussão acima, sempre que falarmos em losango, retângulo ou quadrado, vamos admitir que tal quadrilátero é um paralelogramo e, além disso, usaremos a caracterização de paralelogramo mais adequada para cada situação. De outra forma, admitiremos a validade das seguintes definições:

i. Um losango é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes.

ii. Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos.

iii. Um quadrado é um retângulo que é também um losango, isto é, tem lados congruentes e ângulos retos.

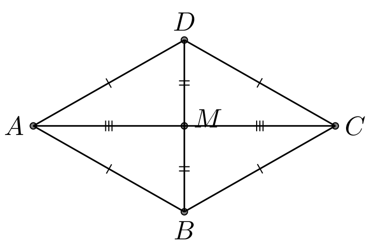
Segue das definições apresentadas que, no conjunto dos quadriláteros, temos o seguinte Diagrama de Venn (representação gráfica da relação de inclusão de conjuntos):



Um losango possui as propriedades usuais de um paraleloramo e, também, propriedades próprias, como as coletadas no resultado a seguir.

Teorema 1. *As diagonais de um losango são segmentos perpendiculares. Além disso, cada uma delas bissecta os ângulos internos do losango relativos aos vértices nos quais incidem.*

Prova. Seja $ABCD$ um losango (veja a figura abaixo). Por ser um paralelogramo, suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam em M, ponto médio comum das mesmas. Por outro lado, pela definição de losango, os lados desse quadrilátero são congruentes. Logo, segue do critério LLL a congruência dos triângulos AMB, CMB, AMD e CMD.

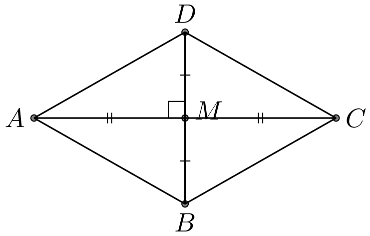


Assim, os quatro ângulos correspondentes com vértices nas extremidade de $\overline{AC}$ são congruentes, e o mesmo ocorre com os quatro ângulos com vértices nas extremidades de $\overline{BD}$. Ainda devido à congruência dos triângulos, os quatro ângulos com vértices em M também são congruentes. Uma vez que a soma de suas medidas é igual a $360°$, cada um deles deve ser igual a um ângulo reto. □

O próximo resultado, recíproco do anterior, caracteriza losangos dentre os quadriláteros.

Teorema 2. *Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares em M, ponto médio comum dessas diagonais, então o quadrilátero é um losango.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero satisfazendo as condições do enunciado.

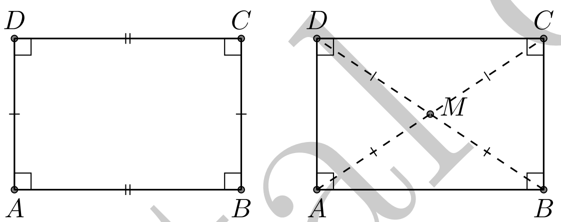


Como as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam em M, o qual é ponto médio comum de ambas, o quadrilátero é um paralelogramo. Além disso, uma vez que os quatro ângulos em M são retos, o critério LAL garante a congruência dos triângulos AMB, CMB, AMD e CMD. Assim, os quatro lados correspondentes, $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, são congruentes. Portanto, $ABCD$ é um losango. $\square$

Assim como sucedeu com os lasangos, retângulos possuem propriedades próprias (para além das propriedades dos paralelogramos), assim como caracterizações. Estas são os objetos dos dois próximos resultados.

Teorema 3. *As diagonais de um retângulo são segmentos congruentes que se dividem ao meio.*

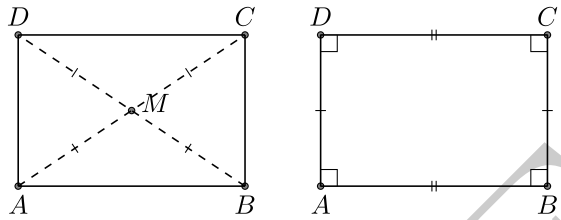
Prova. Seja $ABCD$ um retângulo. Por ser um paralelogramo, os lados opostos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. Por outro lado, pela definição de retângulo, os quatro ângulos internos desse quadrilátero são retos.



Segue do critério LAL a congruência dos triângulos ABC e BAD, da qual concluímos que $AC = BD$. Além disso, por ser um paralelogramo, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam em M, ponto médio comum das mesmas. $\square$

Teorema 4. *Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se dividem ao meio, então o quadrilátero é um retângulo.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero satisfazendo as condições do teorema. Por hipótese, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam em M, ponto médio comum de ambas. Logo, o quadrilátero é um paralelogramo.



Por ser um paralelogramo, os pares de lados opostos do quadrilátero $ABCD$ são formados por segmentos congruentes. Assim, os pares de triângulos isósceles AMB e CMD, assim como ADM e CBM, são congruentes pelo critério LLL. Logo,

$$A\widehat{D}M = D\widehat{A}M = B\widehat{C}M = C\widehat{B}M = \alpha$$

e

$$M\widehat{A}B = M\widehat{B}A = M\widehat{D}C = M\widehat{C}D = \beta.$$

Dessa forma, a soma dos ângulos de $ABCD$ fornece

$$4\alpha + 4\beta = 360^\circ,$$

de sorte que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Portanto,

$$D\widehat{A}B = A\widehat{B}C = B\widehat{C}D = A\widehat{D}C = \alpha + \beta = 90^\circ,$$

ou seja, $ABCD$ é um retângulo. $\square$

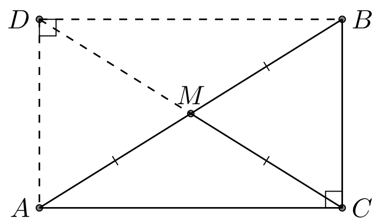
Segue da definição que, além das propriedades dos paralelogramos, os quadrados herdam as propriedades características dos losangos e dos retângulos. Portanto, em um quadrado as diagonais são congruentes e perpendiculares e, além disso, cada uma delas forma um ângulo de 45° com os lados do quadrado. Para esses quadriláteros, vale ainda a seguinte caracterização, cuja demonstração (imediata, à luz do que fizemos acima) deixamos para o leitor.

Teorema 5. *Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes, perpendiculares e se dividem ao meio , então o quadrilátero é um quadrado.*

A demonstração do próximo resultado ilustra uma aplicação interessante do material discutido até aqui.

Teorema 6. *A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa.*

Prova. Dado um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice C, seja M o ponto médio de sua hipotenusa $\overline{AB}$ (veja a figura a seguir).



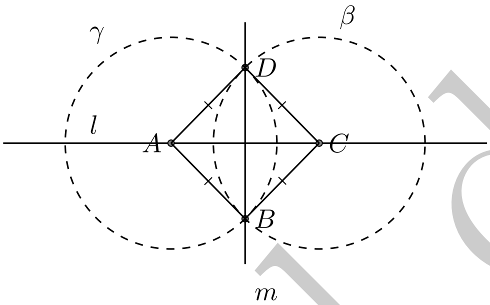
Tome um ponto D em $\overrightarrow{CM}$ de modo que M seja, também, o ponto médio de $\overline{DC}$. Por construção, as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do quadrilátero $ACBD$ se dividem ao meio e concluímos que ele é um paralelogramo. Além disso, como um de seus ângulos internos é reto, concluímos que o mesmo sucede com todos os outros. Logo, $ACBD$ é um retângulo, e segue do Teorema 3 que $AB = CD$ e $AM = MB = CM = MD$. □

2 Algumas construções com régua e compasso

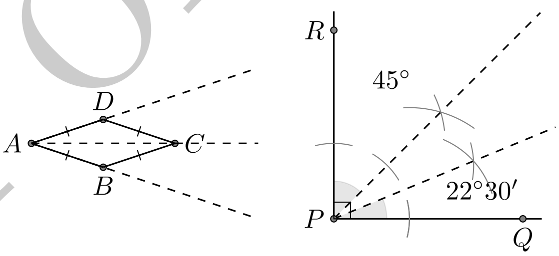
Os métodos de construções com régua e compasso devem ter seus procedimentos justificados pelos conceitos e resultados da Geometria. Usando o assunto tratado na seção anterior, vamos abordar dois problemas nessa direção.

Problema 7. *Fixados no plano uma reta l e um ponto D não pertencente a l, traçar a perpendicular à reta l passando por D.*

A figura a seguir ilustra uma soluçãom cujos procedimentos e justificativas são deixados para o leitor.



No próximo problema de construção, usamos duas construções básicas que passamos a comentar. Já observamos (veja o Teorema 1) que as diagonais de um losango bissectam os ângulos internos dos vértices nos quais incidem; assim, a figura a seguir é autoexplicativa e mostra como dividir um ângulo arbitrário ao meio. Logo, podemos facilmente construir ângulos cujas medidas são 45° e 22°30′ (vinte e dois graus e meio).



Construindo ou transportando ângulos e segmentos, é relativamente simples realizar a construção de um triângulo, a menos de sua posição no plano, baseada nos critérios de congruências (LLL, LAL, ALA ou LAA_o).

Problema 8. *Dada soma a $s = l + d$ das medidas de um lado com a diagonal de um quadrado, construir o quadrado.*

Análise do problema: imaginemos um fio de comprimento s que foi dobrado como na figura 1 de modo que $AC = d$, $AD = l$ e $A\widehat{D}C = 90°$. Supondo o problema resolvido, podemos produzir uma *figura de análise* (figura 2). A partir dos dados, obtemos um novo elemento na figura (triângulo CEF), no qual os elementos que o compõem possibilitam sua construção e, consequentemente, a solução do problema.

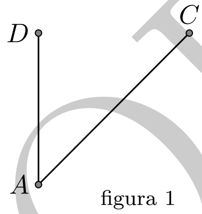


figura 1

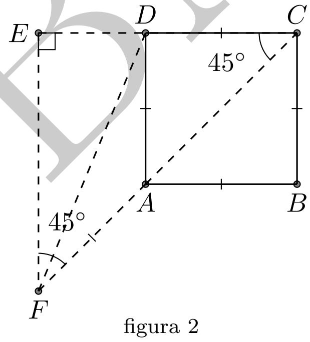


figura 2

Método de construção: execute os seguintes procedimentos:

1. Construa um triângulo retângulo isósceles CEF com hipotenusa $CF = s$ (observe que $C\widehat{F}E = 45° = F\widehat{C}E$).

2. Faça a construção que permite dividir o ângulo $\angle CFE$ ao meio obtendo sobre o segmento $\overline{CE}$ o ponto D tal que $C\widehat{F}D = 22°30'$.

3. Com centro em D e raio $r = CD$ construa o círculo $\lambda = C(D, r)$, obtendo o ponto A em $\overline{CF}$ tal que $AD = r$.

4. Agora, com centros em C e A construa os círculos $\beta = C(C, r)$ e $\gamma = C(A, r)$, obtendo o ponto B na interseção desses círculos e oposto a D em relação à reta $\overleftrightarrow{FC}$.

O quadrilátero $ABCD$ é uma solução para o Problema 2. Faça uma justificativa formal para tal afirmação.

Dicas para o Professor

Neste tópico, damos continuidade ao estudo de quadriláteros, de forma que valem as mesmas recomendações feitas no tópico Quadriláteros. Duas atividades interessantes são realizar um estudo sobre alguns mosaicos geométricos e sobre os ladrilhamentos do plano por quadriláteros, aproveitando para explicitar os vários conceitos e resultados visto neste tópico e no anterior.

Novamente, sugerimos trabalhar com algumas construções geométricas (compasso e régua), abordando problemas que permitam aplicar os principais resultados vistos. Em particular, devem ser trabalhado os problemas clássicos de construções de quadriláteros.

A referência [2] contém vários exercícios simples envolvendo o paralelismo de retas. Na referência [1], encontramos problemas mais conceituais, incluindo vários envolvendo construções geométricas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S. B. M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.