Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte I

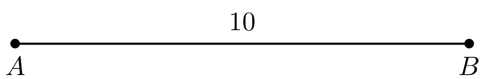
Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes de Oliveira
Prof. Antonio Caminha M. Neto

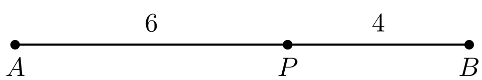
1 Razão de segmentos

Para organizar as ideias, vamos iniciar com o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Considere um segmento AB de tamanho 10.*



Se quisermos achar um ponto P, interno ao segmento AB e que o divida na razão $3:2$ a partir de A, então dividimos AB em $3+2=5$ partes e marcamos P deixando 3 partes à esquerda e 2 à direita.



Assim, a razão $3:2$ aparece em $\frac{AP}{PB}=\frac{6}{4}$.

Deixando os valores específicos do exemplo acima de lado (valores estes que serviram apenas para simplificar a ideia que queremos desenvolver), vemos que $\frac{AP}{PB}$ denota a razão em que o ponto P divide o segmento AB. Observe que o ponto P aparece tanto no numerador quanto no denominador; além disso, os extremos do segmento (no caso, os pontos A e B) aparecem um no numerador e o outro no denominador.

Exemplo 2. *Divida um segmento AB, que mede $8cm$, na razão $1:3$ a partir de A.*

Solução. Uma vez que queremos dividir AB na razão $1:3$, vamos dividi-lo em quatro partes de tamanho $2cm$ cada, deixando uma de tais partes à esquerda do ponto P de divisão. Assim, P está a uma distância $2cm$ de A e $6cm$ de B.

$\square$

Exemplo 3. *Divida um segmento AB, que mede $8cm$, na razão $1:\sqrt{2}$ a partir de A.*

Solução. Queremos dividir AB na razão $1:\sqrt{2}$, mas, para tanto, não podemos dividi-lo em $1+\sqrt{2}$ partes, pois essa quantidade não é um número inteiro. Mas isso não é problema. Basta utilizarmos a definição, isto é, basta observarmos que queremos um ponto P no interior de AB tal que

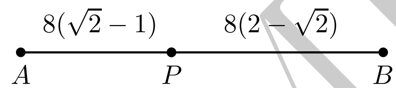
$$\frac{AP}{PB}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} AP\sqrt{2}=PB &\Rightarrow AP(\sqrt{2}+1)=AP+PB \\ &\Rightarrow AP(\sqrt{2}+1)=AB=8 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$AP=\frac{8}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=8(\sqrt{2}-1).$$



$\square$

Exemplo 4. *Dado um segmento AB, chama-se* segmento áureo *de AB o segmento AP, com P em AB, tal que $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$. Se $AB=10$, o comprimento de AP vale:*

(a) $5\sqrt{5}-5$.

(b) $5\sqrt{3}-5$.

(c) $5\sqrt{5}+5$.

(d) $5\sqrt{3}-5$.

(e) 5.

Solução. Faça $AP=x$. Pelas condições do enunciado, temos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB} &\Leftrightarrow \frac{10}{x}=\frac{x}{10-x} \\ &\Leftrightarrow x^2=100-10x \\ &\Leftrightarrow x^2+10x-100=0, \end{aligned}$$

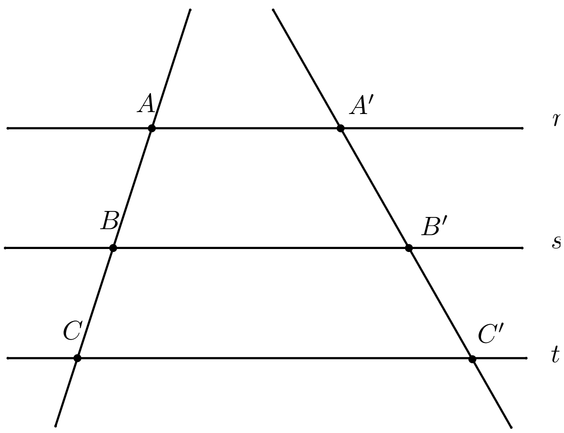
equação cuja solução positiva é $5\sqrt{5}-5$. Portanto, a resposta correta é o item (a). $\square$

2 O teorema de Tales

O teorema de Tales é um resultado fundamental em Geometria Euclidiana plana, e pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 5 (Tales)**.** *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A,A'\in r$, $B,B'\in s$ e $C,C'\in t$, de modo que A,B,C e A',B',C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então,*

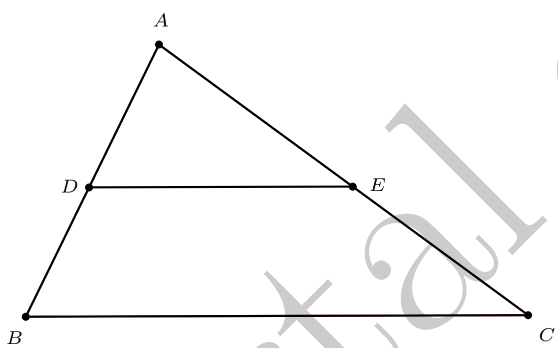
$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$



A demonstração deste teorema em toda sua generalidade necessita de elaborações que estão além dos propósitos destas notas; nesse sentido, sugerimos consultar a referência [1]. Contudo, na próxima seção apresentaremos a demonstração de um caso particular relevante.

Nesta seção, vamos nos concentrar em aprender como utilizar o teorema de Tales, aplicando-os em alguns exemplos simples.

Exemplo 6. *Na figura abaixo, os segmentos BC e DE são paralelos, $AB = 15cm$, $AD = 5cm$ e $AE = 6cm$. Calcule a medida em centímetros do segmento CE.*

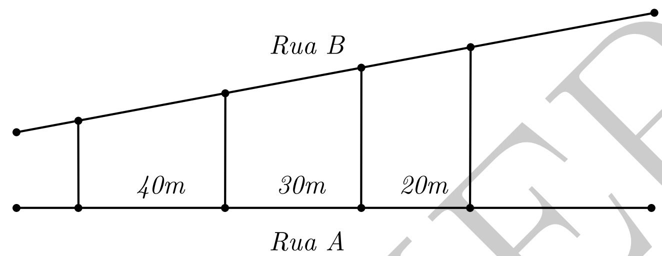


Solução. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} &\Leftrightarrow \frac{5}{15} = \frac{6}{AC}\\ &\Leftrightarrow AC = 18\\ &\Leftrightarrow CE = 12.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura abaixo. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente de cada lote para a rua B, sabendo que a frente total para essa rua tem $180m$?*

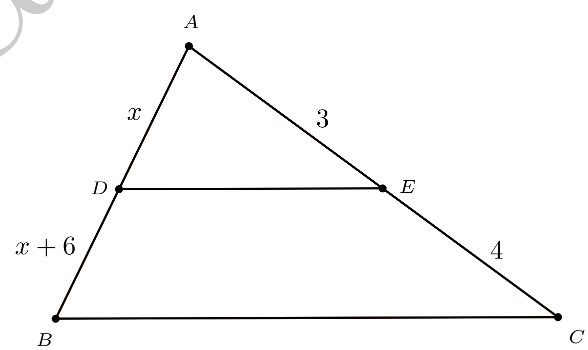


Solução. Como o teorema de Tales garante a proporcionalidade entre as medidas de segmentos determinados por paralelas em transversais, podemos representar as medidas das frentes para a rua B por $4k$, $3k$ e $2k$. Assim,

$$\begin{aligned}4k + 3k + 2k = 180 &\Leftrightarrow 9k = 180\\ &\Leftrightarrow k = 20.\end{aligned}$$

Portanto, as medidas das frentes do lotes para a rua B são $80m$, $60m$ e $40m$. □

Exemplo 8. *Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC determina o ponto D em AB e E em AC. Sabendo-se que $AD = x$, $BD = x + 6$, $AE = 3$ e $EC = 4$, calcule o comprimento do lado AB do triângulo ABC.*



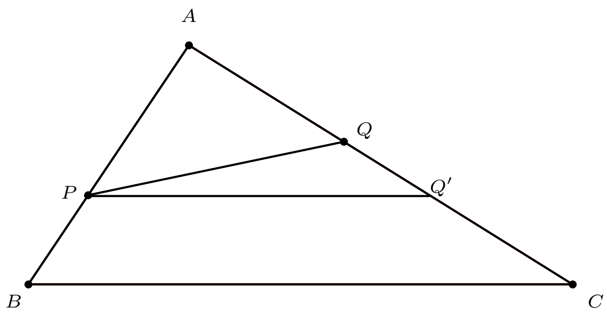
Solução. Pelo teorema de Tales, temos

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} &\Leftrightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow 4x = 3x + 18\\ &\Leftrightarrow x = 18.\end{aligned}$$

□

Exemplo 9. *Considere o triângulo ABC e os pontos P e Q sobre os lados AB e AC, respectivamente. Se $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, mostre que $PQ \parallel BC$.*

Solução. Suponha que PQ não seja paralelo a BC (veja a figura abaixo). Trace, então, uma paralela PQ' por P a BC, como mostrado na figura.



Pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ'}{Q'C}.$$

Mas, como a igualdade $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ é satisfeita por hipótese, temos

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AQ'}{Q'C}$$

Portanto, os pontos Q e Q' são distintos e dividem o lado AC na mesma razão, o que é absurdo.

Logo, PQ é paralelo a BC. □

3 A demonstração de um caso particular do teorema de Tales e mais aplicações

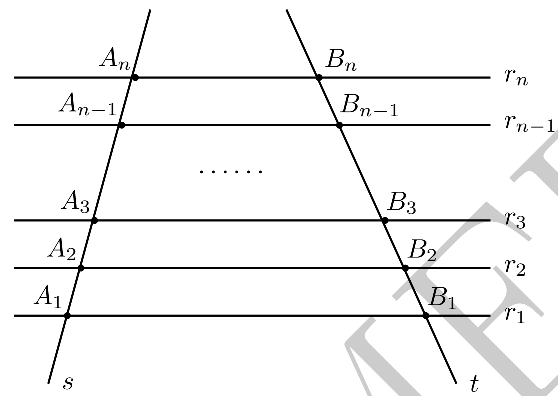
Conforme prometido na seção anterior, nesta seção apresentaremos a demonstração de um caso particular relevante do teorema de Tales. Esse é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 10 (caso particular de Tales). *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Se m e n são naturais tais que $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, então $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$. Em particular,*

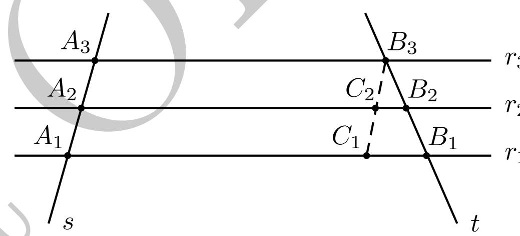
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Para a demonstração desse caso particular do teorema de Tales, precisamos considerar, inicialmente, o seguinte resultado auxiliar.

Lema 11. *Sejam n um número natural, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ retas paralelas e s e t retas transversais a $r_1, r_2, \ldots, r_n$, as quais intersectam essas n retas nos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$, conforme mostrado na figura a seguir. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$, então $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.*



Prova. É suficiente provar que $A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$, uma vez que as demais igualdades podem ser obtidas de forma análoga. Para tanto (veja a figura abaixo), trace por B_3 uma paralela s' à reta s, e sejam C_1 e C_2 seus pontos de interseção com as retas r_1 e r_2, respectivamente.

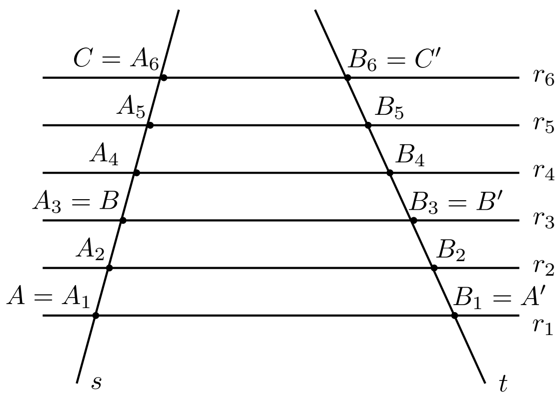


Como $A_3B_3 \parallel A_2C_2 \parallel A_1C_1$ e $A_1A_3 \parallel C_1B_3$, temos que $A_1C_1C_2A_2$ e $A_2C_2B_3A_3$ são paralelogramos. Logo, $C_1C_2 = A_1A_2$ e $A_2A_3 = C_2B_3$, e segue de $A_1A_2 = A_2A_3$ que $C_1C_2 = C_2B_3$. Agora, no triângulo $C_1B_1B_3$, o ponto C_2 é médio do lado C_1B_3 e $C_2B_2 \parallel C_1B_1$. Portanto, pelo teorema da base média, B_2 é ponto médio do lado B_1B_3, ou, o que é o mesmo, $B_1B_2 = B_2B_3$. □

Podemos, finalmente, demonstrar o caso particular do teorema de Tales que é o conteúdo do teorema anterior.

Prova do Teorema 10. Novamente por simplicidade, façamos a prova no caso em que $m = 2$ e $n = 3$; novamente, a demonstração no caso geral é completamente análoga. Nesse caso, supomos que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ e queremos mostrar que $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$. Para tanto (veja a figura abaixo), divida o segmento AC em $2+3 = 5$ partes iguais, obtendo pontos $A_1 = A$, A_2, $A_3 = B$, A_4, A_5, $A_6 = C$ sobre s e $B_1 = A'$, B_2, $B_3 = B'$, B_4, B_5, $B_6 = C'$ sobre t. Como $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_5A_6$, segue do lema anterior que $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_5B_6 = \ell$. Logo,

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}.$$



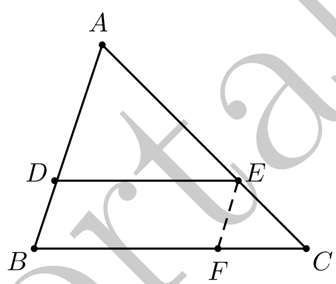
□

Observe que, o caso particular do teorema de Tales demonstrado acima não engloba as situações em que $\frac{AB}{BC}$ é igual a um número irracional ($\sqrt{2}$, por exemplo). Nesses casos, assumiremos a validade do teorema sem demonstração, referindo o leitor a [1] para os detalhes.

A proposição a seguir traz uma consequência muito importante do teorema de Tales. De fato, ela é o primeiro exemplo de uma *semelhança de triângulos*, conceito que será muito importante nas próximas aulas.

Proposição 12. *Se, sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC, marcarmos pontos D e E tais que DE e BC são paralelos, então os lados dos triângulos ABC e ADE são respectivamente proporcionais. Mais precisamente,*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$



Prova. O teorema de Tales dá a primeira das igualdades do enunciado. Para a segunda igualdade trace, pelo ponto E (veja a figura acima), a reta paralela à reta AB, e marque seu ponto F de interseção com o lado BC. Então, por um lado, o quadrilátero $BFED$ tem lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo e, daí, $BF = DE$. Por outro, utilizando novamente o teorema de Tales (aplicado às paralelas AB e EF, com transversais AC e BC), obtemos

$$\frac{CF}{BC} = \frac{CE}{AC}.$$

Então,

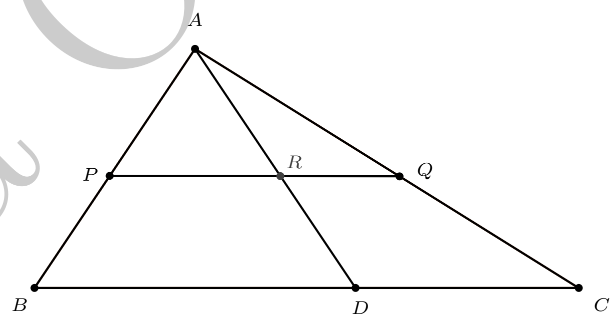
$$\begin{aligned}\frac{BC}{DE} &= \frac{BC}{BC - CF} = \frac{1}{1 - \frac{CF}{BC}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{CE}{AC}} = \frac{AC}{AC - CE} = \frac{AC}{AE}.\end{aligned}$$

□

4 Mais aplicações

Esta última seção mostrará como o teorema de Tales, aplicado em conjunção com o resultado da proposição anterior, nos permite abordar problemas bem mais difíceis.

Exemplo 13. *Considere o triângulo ABC e uma ceviana AD, como D sobre o lado BC. Sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC, tais que $PQ \parallel BC$. Se AD intersecta PQ em R, mostre que R divide o segmento PQ na mesma razão em que D divide o segmento BC.*

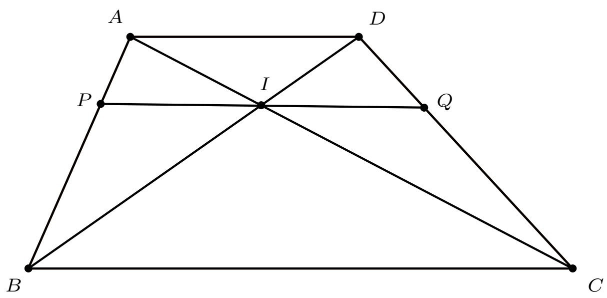


Solução. Aplicando a proposição anterior aos triângulos APR e ABD, obtemos $\frac{PR}{BD} = \frac{AP}{AB}$. Por outro lado, pelo teorema de Tales, temos $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$. Agora, aplicando a proposição anterior aos triângulos ARQ e ADC, obtemos $\frac{AQ}{AC} = \frac{RQ}{DC}$. Combinando as três igualdades acima, segue que $\frac{PR}{BD} = \frac{RQ}{DC}$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{BD}{DC}.$$

Mas isso significa exatamente que R divide PQ na mesma razão em que D divide o lado BC. □

Exemplo 14. *Seja $ABCD$ um trapézio de bases AD e BC. Seja I a interseção das diagonais AC e BD. Nas notações da figura a seguir, se o segmento PQ é paralelo às bases do trapézio e passa por I, mostre que $PI = QI$.*



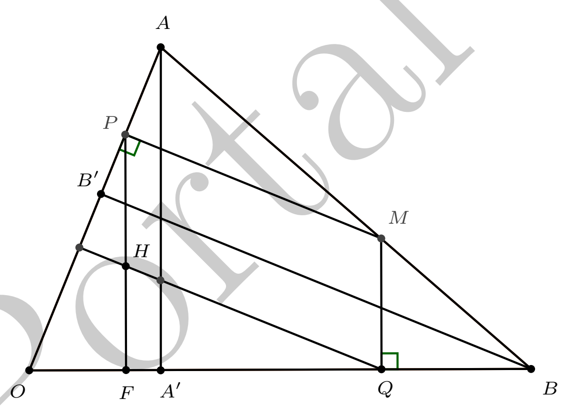
Prova. Aplicando a Proposição 12 aos triângulos ABD e PBI, obtemos $\frac{AD}{PI} = \frac{AB}{PB}$. Por outro lado, pelo Teorema de Tales, temos $\frac{AB}{PB} = \frac{DC}{QC}$. Agora, aplicando a Proposição 12 aos triângulos DAC e QIC, segue que $\frac{DC}{QC} = \frac{AD}{IQ}$. Combinando as três igualdades acima, obtemos finalmente

$$\frac{AD}{PI} = \frac{AD}{IQ},$$

de forma que $PI = IQ$. □

Para o próximo exemplo, recordamos que, em todo triângulos, as três alturas passam por um mesmo ponto, conhecido como o **ortocentro** do triângulo.

Exemplo 15. *É dado um triângulo OAB, tal que $A\widehat{O}B = \alpha < 90°$. Seja M um ponto sobre o lado AB, e denote por P e Q os pés das perpendiculares baixadas de M aos lados OA e OB, respectivamente. Se H é o ortocentro do triângulo OPQ, mostre que H pertence ao segmento $A'B'$, onde A' e B' denotam os pés das alturas do triângulo ABC, traçadas respectivamente a partir dos vértices A e B.*



Prova. Como PH e MQ são perpendiculares a OB, elas são paralelas. Analogamente QH e MP são perpendiculares a OA, logo, também paralelas. Portanto, o quadrilátero $PHQM$ tem seus pares de lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo.

Pelo teorema de Tales, com $B'B \parallel PM$, temos $\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA}$. Por outro lado, aplicando a Proposição 12 aos triângulos BMQ e BAA', temos $\frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'}$. Combinando as duas relações acima e levando em conta que $MQ = PH$ (uma vez que $PHQM$ é um paralelogramo), chegamos a

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{MQ}{AA'} = \frac{PH}{AA'}. \tag{1}$$

Agora, seja K o ponto de interseção entre os segmentos PH e $B'A'$ (não mostramos K na figura acima). Como $K \in PH$ e $PH \parallel AA'$, temos $PK \parallel AA'$. Portanto, aplicando uma vez mais a Proposição 12, desta feita aos triângulos $B'PK$ e $B'AA'$, obtemos

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{PK}{AA'}. \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), chegamos à relação

$$\frac{PH}{AA'} = \frac{PK}{AA'},$$

de onde segue que $PH = PK$ e, daí, $H = K$. Em particular, $H \in A'B'$. □

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em três encontros de 50 minutos cada. É muito importante apresentar a demonstração do caso particular do teorema de Tales discutido nestas notas, pois o aluno deve perceber que ele não é um resultado auto-evidente, e que a validade de novos fatos geométricos realmente se apoia na validade de outros resultados mais simples, já estudados. A referência [2] contém vários exemplos simples envolvendo o teorema de Tales. Para o leitor interessado em aplicações mais elaboradas, sugerimos a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.