Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares

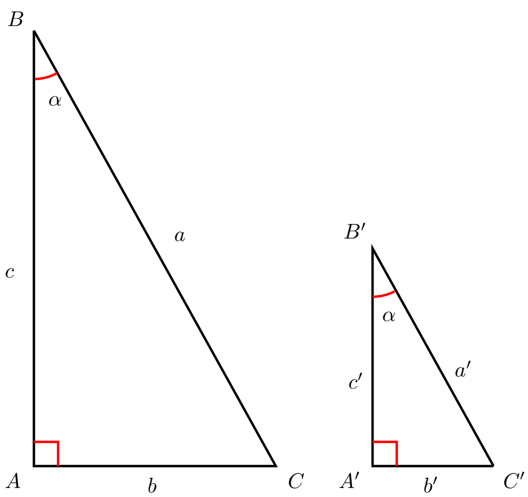
Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Razões trigonométricas em triângulos retângulos

Dado um ângulo agudo qualquer, de medida α, podemos construir um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, tal que o ângulo $\angle ABC$ mede α. Se um outro triângulo retângulo $A'B'C'$ é tal que a medida do ângulo $\angle A'B'C'$ é também igual a α, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (basta observar a correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$).



Dessa semelhança, segue que

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

Assim, as razões $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ e $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, independem do triângulo retângulo considerado. Por tal razão, as denominamos, respectivamente, de **seno**, **cosseno** e **tangente** de α, e denotamos $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$, também respectivamente.

Desse modo, e ainda nas notações da figura acima, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}.$$

No triângulo retângulo ABC da figura, os lados AC e AB são denominados **cateto oposto** e **cateto adjacente** ao ângulo $\angle ABC = \alpha$, respectivamente. Assim, podemos dizer, equivalentemente, que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a}\,\alpha}{\text{medida da hipotenusa}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a}\,\alpha}{\text{medida da hipotenusa}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a}\,\alpha}{\text{medida do cateto adjacente a}\,\alpha}.$$

Note que pelo Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Então:

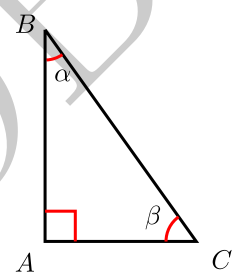
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.\end{aligned}$$

A identidade $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é conhecida como a **relação fundamental da Trigonometria**.

Observe, ainda, que se α e β são os dois ângulos internos agudos de um triângulo retângulo, isto é, se α e β são complementares, então:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta, \ \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \ \text{e} \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Com efeito, isso decorre do fato que o cateto oposto a α é adjacente a β e o cateto adjacente a α é oposto β (veja a figura abaixo).



2 Razões trigonométricas de ângulos notáveis

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, cujos catetos medem 1 cm (veja a próxima figura). Então, cada um dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ mede 45^{o}. Além disso, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}BC^2 = AB^2 + AC^2 &\Longrightarrow BC^2 = 1^2 + 1^2\\ &\Longrightarrow BC^2 = 2\\ &\Longrightarrow BC = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

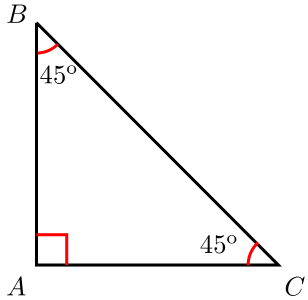
Daí, obtemos:

$$\operatorname{sen} 45^{\text{o}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

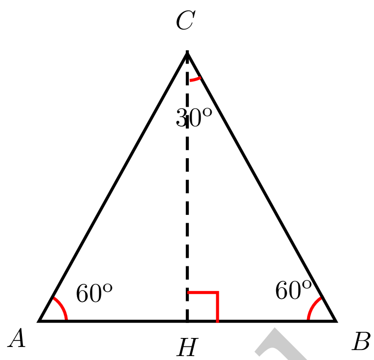
$$\cos 45^{\text{o}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\operatorname{tg} 45^{\text{o}} = \frac{1}{1} = 1.$$



Agora, tomemos um triângulo equilátero ABC de lado 1 (veja a figura abaixo). Seja H o pé da altura relativa ao lado AB. Sabemos que a altura de um triângulo equilátero de lado l é dada por $\frac{l\sqrt{3}}{2}$; portanto, a altura CH mede $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Agora, como todo triângulo equilátero é em particular isósceles (com respeito a qualquer lado), o segmento CH, além de ser a altura relativa ao lado AB, também é a bissetriz interna relativa ao vértice C. Como $A\widehat{C}B = 60^o$ (pois em um triângulo equilátero cada ângulo interno mede 60^o), segue que $H\widehat{C}B = 30^o$.



Observando o triângulo CHB, retângulo em H, podemos concluir que

$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\operatorname{tg} 30^o = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como $\angle HCB$ e $\angle HBC$ são ângulos complementares, a observação feita na Seção 1 sobre as razões trigonométricas de ângulos complementares garante que:

$$\operatorname{sen} 60^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^o = \operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}$$

e

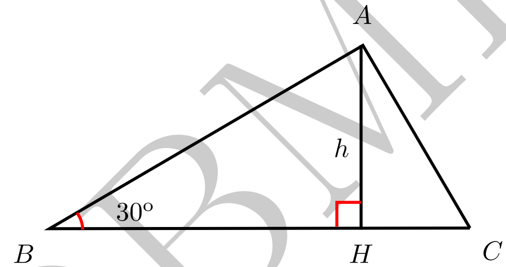
$$\operatorname{tg} 60^o = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^o} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

3 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos a título de ilustração dos conceitos desenvolvidos até aqui.

Exemplo 1. *Calcule as medidas dos lados de um triângulo ABC, retângulo em A, sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede $h = 8$ cm e $\widehat{B} = 30^o$.*

Solução. Denotando por H o pé da altura relativa ao lado BC, temos que o triângulo ABH é retângulo em H (veja a figura a seguir).



Daí, segue que

$$\begin{aligned} H\widehat{A}C &= 90^o - H\widehat{C}A \\ &= 90^o - B\widehat{C}A \\ &= A\widehat{B}C = 30^o. \end{aligned}$$

Logo, calculando o cosseno do ângulo $\angle HAC$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos 30^o = \frac{h}{AC} &\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC} \\ &\Longrightarrow \sqrt{3} \cdot AC = 16 \\ &\Longrightarrow AC = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow AC = \frac{16\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Agora, calculando primeiramente o seno e depois o cosseno do ângulo $\angle ABC$, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^o = \frac{AC}{BC} &\Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{BC} \\ &\Longrightarrow BC = \frac{32\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos 30^o = \frac{AB}{BC} &\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\frac{32\sqrt{3}}{3}} \\ &\Longrightarrow 2AB = 32 \\ &\Longrightarrow AB = 16. \end{aligned}$$

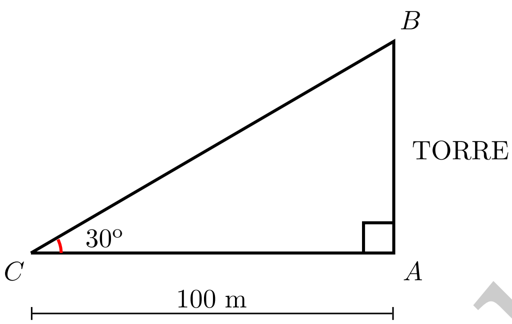
□

Exemplo 2. *O topo B de uma torre vertical AB é visto de um determinado ponto C no solo sob um ângulo de 30^o. Além disso, a distância do ponto C à base da torre é igual a 100 m. Assumindo como irrelevante o desnível entre o ponto C e a base A, calcule a altura da torre.*

Solução. O observador C, o topo B e a base A da torre formam um triângulo ABC, retângulo em A. Uma vez que o topo da torre é visto pelo observador sob um ângulo de 30^{o}, temos $A\widehat{C}B = 30^{\text{o}}$. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^{\text{o}} = \frac{AB}{AC} &\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{100} \\ &\Longrightarrow AB = \frac{100\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

□



Exemplo 3. *Um observador vê um prédio, construído em um terreno plano, sob um ângulo de 45^o. Aproximando-se 100m do prédio, o observador passa a vê-lo sob um ângulo de 60^o. Qual é a altura do prédio?*

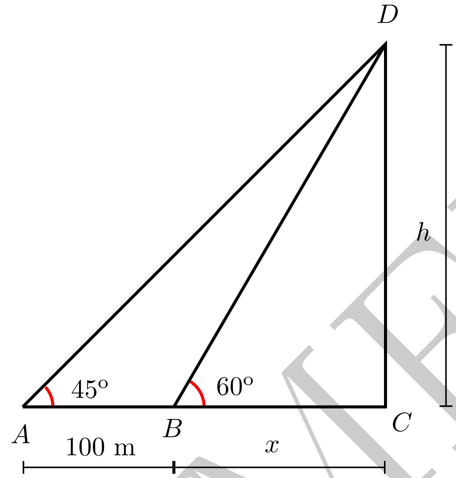
Solução. Denotemos o observador por A, no momento em que ele vê o prédio sob um ângulo de 45^{o}, e por B, no momento em que ele vê o prédio sob um ângulo de 60^{o} (veja a próxima figura).

Denotemos a base e o topo do prédio por C e D, respectivamente. Agora, chamemos de h a altura do prédio e de x a distância de B a C (veja novamente a figura a seguir).

Desse modo, podemos calcular as tangentes dos ângulos $\angle DAC$ e $\angle DBC$ para obter, respectivamente,

$$1 = \operatorname{tg} 45^{\text{o}} = \frac{h}{x+100} \Longrightarrow h = x + 100$$

e



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^{\text{o}} = \frac{h}{x} &\Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \\ &\Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{x+100}{x} \\ &\Longrightarrow \sqrt{3}x = x + 100 \\ &\Longrightarrow x(\sqrt{3}-1) = 100 \\ &\Longrightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}-1} \\ &\Longrightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ &\Longrightarrow x = \frac{\cancel{100}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}} \\ &\Longrightarrow x = 50(\sqrt{3}+1). \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned} h &= x + 100 \\ &= 50(\sqrt{3}+1) + 100 \\ &= 50(\sqrt{3}+1+2) \\ &= 50(\sqrt{3}+3). \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min cada para discutir o conteúdo presente nesse material, sendo uma dessas sessões utilizada para apresentar as seções 1 e 2, e outra sessão para apresentar os exemplos contidos na seção 3. Depois de expor as razões trigonométricas em triângulos retângulos, comente com os alunos que esses conceitos podem ser vistos de modo mais geral, de forma que não contemplem somente ângulos agudos, mas que isso será feito *a posteriori*.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, 9ª Edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.