Módulo de Equações do Segundo Grau

Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos.

Nono Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Equações do 2^o grau: Resultados Básicos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e a, b e c constantes, é denominada equação do segundo grau na variável x. Os números a, b e c são os coeficientes da equação. Observe os modelos abaixo e identifique-os:*

i) $2x^2 - 9x + 3 = 0$, *então* $a = 2$, $b = -9$ *e* $c = 3$.

ii) $x^2 + 2x - 6 = 0$, *então* $a = 1$, $b = 2$ *e* $c = -6$.

iii) $-x^2 + 5x + 3 = 0$, *então* $a = -1$, $b = 5$ *e* $c = 3$.

a) $x^2 - 2x + 6 = 0$

b) $2x^2 + 3x - 8 = 0$

c) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

d) $-4x^2 + 7x - 12 = 0$

e) $x^2 + x = 0$

f) $x^2 - 25 = 0$

Exercício 2. *Siga o modelo e, após o desenvolvimento dos produtos notáveis, identifique os valores dos coeficientes a, b e c nas equações do 2° grau resultantes das operações.*

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (x-2)^2 &= (x+3)^2 \\ x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 + 6x + 9 \\ 2x^2 - 2x + 5 - x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ x^2 - 8x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Então $a = 1$, $b = -8$ *e* $c = -4$.

a) $(x-1)^2 + (x+2)^2 = (x-3)^2$

b) $(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) = x + (x+7)^2$

c) $(x-1)^2 + x(x+1) = 2x - (x+3)^2$

Exercício 3. *Faça a expansão dos produtos indicados como no exemplo abaixo.*

$$\begin{aligned} (x+2)(x+3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3 \\ &= x^2 + 5x + 6. \end{aligned}$$

a) $x(x+7)$.

b) $(x+2)(x+5)$.

c) $(x-2)(x+3)$.

Exercício 4. *Sejam m e n números tais que*

$$(x-m)(x-n) = x^2 - 7x + 10.$$

a) Determine o valor de $m+n$.

b) Determine o valor de mn.

c) Encontre m e n que satisfazem a soma e o produto encontrados nos itens anteriores.

d) Encontre as soluções da equação.

Exercício 5. *O discriminante da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é o número $\Delta = b^2 - 4ac$. Calcule-o em cada um dos itens abaixo.*

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $-x^2 + x + 30 = 0$

d) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

e) $-x^2 - 2x - 1 = 0$

f) $2x^2 + 6x - 8 = 0$

g) $x^2 + 3x + 9 = 0$

h) $x^2 + 9x = 0$

i) $-x^2 + 16 = 0$

Exercício 6. *Observe os modelos e resolva as equações do 2° grau no universo dos números reais.*

i) Modelo 1.

$$\begin{aligned} x^2 + 9x &= 0 \\ x(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

Numa multiplicação com resultado nulo, ao menos um dos fatores deve ser zero, isto é:

$$a \cdot b = 0 \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Logo, $x = 0$ ou $x + 9 = 0$. Portanto, o conjunto solução é $S = \{-9, 0\}$.

ii) Modelo 2.

$$\begin{aligned} x^2 - 64 &= 0 \\ x^2 &= 64 \\ x &= \pm\sqrt{64} \\ x &= \pm 8 \end{aligned}$$

Logo, as raízes são $x = 8$ ou $x = -8$ e o conjunto solução é $S = \{-8, 8\}$.

a) $x^2 - 4x = 0$

b) $x^2 - 4 = 0$

c) $x^2 + 9x = 0$

d) $x^2 + 9 = 0$

e) $-x^2 - 7x = 0$

f) $-x^2 + 121 = 0$

Exercício 7. *Verifique se* -1, 2 *ou* 5 *são raízes da equação* $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Exercício 8. *Qual o valor de* m *para que* -3 *seja raiz da equação* $-mx^2 - 4mx + 21 = 0$*?*

Exercício 9. *As raízes da equação do* 2° *grau,* $ax^2+bx+c = 0$*, podem ser encontradas através da fórmula*[1]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

na qual a expressão $b^2 - 4ac$ *é normalmente chamada de discriminante e representada pela letra grega* Δ*. Verifique em quais equações abaixo o discriminante é positivo, negativo ou nulo.*

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 10 = 0$

e) $-3x^2 + x + 4 = 0$

f) $x^2 + x + 4 = 0$

g) $x^2 + 16x + 64 = 0$

Exercício 10. *A partir da fórmula de Bhaskara, observando o modelo abaixo, calcule as raízes de cada uma das equações que seguem.*

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

Tem-se $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 4 + 32 = 36$ *e, portanto, as raízes são: Daí,* $\sqrt{\Delta} = 6$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2+6}{4} \\ &= 1 \\ x_2 &= \frac{-2-6}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-2, 1\}$.

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $2x^2 + 1x - 10 = 0$

d) $-3x^2 + 1x - 10 = 0$

e) $x^2 + 4x + 4 = 0$

f) $5x^2 + 2x + 2 = 0$

g) $3x^2 + 5x + 7 = 0$

Exercício 11. *A partir da fórmula geral das soluções de uma equação do segundo grau*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

analise a quantidade de raízes reais em função do discriminante Δ.

Exercício 12. *Sendo* h *a maior raiz da equação* $x^2+x-1 = 0$*. Então qual o valor de* $\dfrac{h^5}{1-h} + \dfrac{2h^6}{(1-h)^2}$*?*

Exercício 13. *Um grupo de jovens aluga, por* 342 *reais, uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles,* 19 *reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?*

Exercício 14. *Os primeiros dígitos da representação decimal do número* a *são* $2,45$*. Determine se* $a^2 - 5a + 6$ *é positivo ou negativo.*

Exercício 15. *Encontre os valores de* a *para os quais a equação* $x^2 - ax + 1 = 0$ *não possui raízes reais.*

Exercício 16. *Encontre todos os valores de* k *para os quais a equação* $x^2 + 2(k-1)x + (k+5) = 0$ *possui pelo menos uma raiz positiva.*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 17. *Qual a maior raiz da equação*

$$-2x^2 + 3x + 5 = 0?$$

Exercício 18. *Calcule as soluções da equação*

$$2x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Exercício 19. *O número* -3 *é a raiz da equação* $x^2 - 7x - 2c = 0$*. Nessas condições, determine o valor do coeficiente* c.

Exercício 20. *Seja* x *um número real não nulo tal que* $x + \dfrac{1}{x} = 2$*. Calcule o valor de* $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Exercício 21. *Qual o conjunto solução da equação no universo dos reais.*

$$\sqrt{3x-2} = \sqrt{x} + 2?$$

[1] Uma demonstração para essa fórmula encontra-se na última seção. Comumente ela é chamada de fórmula de *Bhaskara*

Exercício 22. *A equação $ax^4 + bx^2 + c$, com $a \neq 0$, é denominada equação biquadrada. É possível encontrar suas soluções fazendo a mudança de variável $x^2 = y$ e assim transformando-a em uma equação do segundo grau. Por exemplo, para encontrarmos as raízes de $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$, trocamos x^2 por y obtendo:*

$$\begin{aligned} x^4 - 18x^2 + 32 &= 0 \\ y^2 - 18y + 32 &= 0 \\ y &= \frac{18 \pm \sqrt{196}}{2} \\ y &= 9 \pm 7. \end{aligned}$$

Analisamos agora separadamente cada um dos possíveis valores para x. No primeiro caso, se $y = 9 + 7 = 4^2$, então $x = \pm 4$. No segundo caso, se $y = 9 - 7 = (\sqrt{2})^2$, então $x = \pm\sqrt{2}$. Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{-4, 4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Em alguns casos, pode ocorrer que o valor encontrado para y seja negativo e consequentemente não existiriam valores no conjunto dos números reais correspondentes para x. Seguindo o modelo anterior, encontre as raízes reais das equações abaixo:

a) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

b) $x^4 + 4x^2 - 60 = 0$.

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 23. *Encontre $x^2 + y^2$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e*

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 880. \end{cases}$$

Exercício 24. *Resolva a equação*

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x.$$

Exercício 25. *Encontre as soluções de:*

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

Exercício 26. *Encontre as soluções de:*

$$\sqrt{x^2 + 2ax - a} = x - 1.$$

Exercício 27. *Para quais valores de a a equação*

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$$

possui mais que duas raízes?

Exercício 28. *Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raiz racional.*

Exercício 29. *Encontre todas as soluções reais de:*

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}.$$

Exercício 30. *Encontre todas as soluções reais de*

$$\sqrt[4]{x - 1} + \sqrt[4]{5 - x} = 2.$$

Exercício 31. *Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$, com $0 < x < 5$.*

Exercício 32. *Sendo a e b inteiros não nulos, resolva a equação*

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$$

sabendo que uma de suas raízes é um inteiro positivo.

Exercício 33. *A calculadora $MK - 97$ pode efetuar as seguintes três operações com números em sua memória:*

a) *Determinar se dois números escolhidos são iguais;*

b) *Adicionar dois números escolhidos;*

c) *Para os números escolhidos a e b, determinar as raízes reais da equação $x^2 + ax + b = 0$ ou anunciar que tal equação não possui raízes reais.*

Os resultados de cada operação são acumulados em sua memória. Inicialmente a memória contém apenas o número z que é desconhecido por seus usuários. Como podemos determinar, usando a calculadora $MK - 97$, se z é igual a 1?

Exercício 34. *Encontre as raízes das equações:*

a) $x^2 - |x| - 2 = 0$.

b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$.

Exercício 35. *Determine todos os y tais que*

$$(y^2 + y - 6)(y^2 - 6y + 9) - 2(y^2 - 9) = 0.$$

Dica: Tente fatorar as expressões dadas.

Exercício 36. *Para quais valores de r vale que:*

$$(r^2 + 5r - 24)(r^2 - 3r + 2) = (4r - 10)(r^2 + 5r - 24)?$$

Exercício 37. *Na equação $x^2 + px + q = 0$, os coeficientes p e q podem assumir qualquer valor no intervalo $[-1, 1]$. Quais são os possíveis valores das raízes de tal equação?*

Exercício 38. *Encontre as soluções de:*

$$2(x - 3) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

Exercício 39. *Encontre todas as soluções reais de:*

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12$$

Exercício 40. *Deduza a formula para as raízes de* $ax^2 + bx + c = 0$, *com* $a \neq 0$, *em função dos coeficientes da equação.*

Exercício 41. *Suponha que* $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$ *para três valores reais distintos da variável* x. *É verdade que* $a = m$, $b = n$ *e* $c = p$*?*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) Temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = 6$.

b) Temos: $a = 2$, $b = 3$ e $c = -8$.

c) Temos: $a = -1$, $b = 4$ e $c = -3$.

d) Temos: $a = -4$, $b = 7$ e $c = -12$.

e) Temos: $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$.

f) Temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

2. *a)* $(x-1)^2 + (x+2)^2 = (x-3)^2$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (x+2)^2 &= (x-3)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 &= x^2 - 6x + 9 \\ 2x^2 + 2x + 5 - x^2 + 6x - 9 &= 0 \\ x^2 + 8x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Então $a = 1$, $b = 8$ e $c = -4$.

b) $(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) = x + (x+7)^2$

$$\begin{aligned} (2x-5)^2 + (x-2)(x+2) &= x + (x+7)^2 \\ 4x^2 - 20x + 25 + x^2 - 4 &= x + x^2 + 14x + 49 \\ 5x^2 - 20x + 21 - x - x^2 - 14x - 49 &= 0 \\ 4x^2 - 35x - 28 &= 0 \end{aligned}$$

Então $a = 4$, $b = -35$ e $c = -28$.

c) $(x-1)^2 + x(x+1) = 2x - (x+3)^2$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + x(x+1) &= 2x - (x+3)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + x^2 + x &= 2x - (x^2 + 6x + 9) \\ 2x^2 - x + 1 &= 2x - x^2 - 6x - 9 \\ 2x^2 - x + 1 - 2x + x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ 3x^2 + 3x + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Então $a = 3$, $b = 3$ e $c = 10$.

3.

a) $x^2 + 7x$.

b) $x^2 + 7x + 10$.

c) $x^2 + x - 6$.

4. *Desenvolvendo o produto, obtemos:*

$$\begin{aligned} (x-m)(x-n) &= x^2 - nx - mx + mn \\ &= x^2 - (m+n)x + mn. \end{aligned}$$

Assim, $m + n = 7$ e $mn = 10$. Veja que $m = 2$ e $n = 5$ satisfazem a soma e o produto encontrados nos dois primeiros itens. Se $x = m$ ou $x = n$, o termo esquerdo será nulo e consequentemente podemos afirmar que m e n são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10$. Assim, 2 e 5 são as raízes procuradas e não existem outros números cuja soma é 7 e o produto é 10.

5. *a)* Tem-se $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$.

b) Tem-se $a = 5$, $b = 3$ e $c = -2$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$.

c) Tem-se $a = -1$, $b = 1$ e $c = 30$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 30 = 1 + 120 = 121$.

d) Tem-se $a = 3$, $b = 5$ e $c = 1$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 25 - 12 = 13$.

e) Tem-se $a = -1$, $b = -2$ e $c = -1$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$.

f) Tem-se $a = 2$, $b = 6$ e $c = -8$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 36 + 64 = 100$.

g) Tem-se $a = 1$, $b = 3$ e $c = 9$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 9 - 36 = -27$.

h) Tem-se $a = 1$, $b = 9$ e $c = 0$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 81 - 0 = 81$.

i) Tem-se $a = -1$, $b = 0$ e $c = 16$. Portanto, $\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 16 = 0 + 64 = 64$.

6. *a)* $x^2 - 4x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{0, 4\}$.

b) $x^2 - 4 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-2, 2\}$.

c) $x^2 + 9x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 9x &= 0 \\ x(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-9, 0\}$.

d) $x^2 + 9 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 9 &= 0 \\ x^2 &= -9 \\ x &= \pm\sqrt{-9} \end{aligned}$$

Como $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$, *o conjunto solução é vazio, ou seja,* $S = \varnothing$.

e) $-x^2 - 7x = 0$

$$\begin{aligned} -x^2 - 7x &= 0 \\ x(-x - 7) &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-7, 0\}$.

f) $-x^2 + 121 = 0$

$$\begin{aligned} -x^2 + 121 &= 0 \\ 121 &= x^2 \\ \pm\sqrt{121} &= x \\ \pm 11 &= x. \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-11, 11\}$.

Comentário para professores:. *É importante destacar o significado prático de uma raiz numa equação, ou seja, o valor que torna verdadeira a igualdade associada à equação. A substituição do(s) valor(es) calculado(s) de modo a inspecionar a respectiva validade de cada raiz deve ser enfatizada entre os alunos.*

7. *Substituindo os valores na equação, temos:*

$$\begin{aligned} (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 10 &= 1 + 7 + 10 = 18 \\ (2)^2 - 7 \cdot 2 + 10 &= 4 - 14 + 10 = 0 \\ (5)^2 - 7 \cdot 5 + 10 &= 25 - 35 + 10 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, apenas 2 *e* 5 *são raízes da equação.*

8. *Para que* $x = -3$ *seja raíz, devemos ter:*

$$\begin{aligned} -m \cdot (-3)^2 - 4m \cdot (-3) + 21 &= 0 \\ -9m + 12m + 21 &= 0 \\ 3m &= -21 \\ m &= -21/3 \\ m &= -7 \end{aligned}$$

Portanto, $m = -7$.

9. *Temos:*

a) $\Delta = 9 > 0$ *b)* $\Delta = 25 > 0$ *c)* $\Delta = 25 > 0$
d) $\Delta = -36 < 0$ *e)* $\Delta = 49 > 0$ *f)* $\Delta = -15 < 0$
g) $\Delta = 0$

10. *a) Tem-se* $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$. *Daí,* $\sqrt{\Delta} = 5$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7+5}{2} \\ &= 6 \\ x_2 &= \frac{7-5}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{1, 6\}$.

b) Tem-se $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$. *Daí,* $\sqrt{\Delta} = 3$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5+3}{2} \\ &= 4 \\ x_2 &= \frac{5-3}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{1, 4\}$.

c) Tem-se $\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81$.*Daí,* $\sqrt{\Delta} = 9$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+9}{4} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{-1-9}{4} \\ &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{-5}{2}, 2\right\}$.

d) Tem-se $\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-10) = 1 + 120 = 121$. *Daí,* $\sqrt{\Delta} = 11$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+11}{-6} \\ &= \frac{-5}{3} \\ x_2 &= \frac{-1-11}{-6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{-5}{3}, 2\right\}$.

e) Tem-se $\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$. *Daí,* $\sqrt{\Delta} = 0$ *e*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4+0}{2} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{4-0}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{2\}$.

f) Tem-se $\Delta = (2)^2 - 4\cdot5\cdot2 = 4-40 = -36$. Daí, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e, portanto, $S = \varnothing$.

g) Tem-se $\Delta = (5)^2 - 4\cdot3\cdot7 = 25-84 = -59$. Daí, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e, portanto, $S = \varnothing$.

11. *i) Para $\Delta < 0$, como $\Delta \notin \mathbb{R}$, não há raízes reais (conjunto solução vazio).*

ii) Para $\Delta = 0$, há raízes reais iguais e ambas são iguais (conjunto solução unitário).

iii) Para $\Delta > 0$, há raízes reais diferentes (conjuntos solução com dois elementos).

Comentário para professores:. *Após a questão sobre a importância do valor numérico do delta é salutar destacar o motivo do seu nome ser discriminante. Discriminar é mostrar, expor, exibir. O exercício anterior nos permite concluir que o Δ "mostra" a quantidade de raízes de uma equação do 2° grau.*

12. *Como h é uma raiz da equação, temos $h^2 = 1-h$. Isso nos permite trocar o termo $1-h$ por h^2. Logo,*

$$\begin{aligned}\frac{h^5}{1-h}+\frac{2h^6}{(1-h)^2} &= \frac{h^5}{h^2}+\frac{2h^6}{(h^2)^2}\\ &= \frac{h^5}{h^2}+\frac{2h^6}{h^4}\\ &= h^3+2h^2\\ &= h(h^2)+2h^2\\ &= h(1-h)+2h^2\\ &= h-h^2+2h^2\\ &= h+h^2\\ &= h+1-h\\ &= 1\end{aligned}$$

13. *Sejam n o número de jovens e p o valor que cada pessoa deveria pagar. Sendo assim, $n\cdot p = 342$. Excluindo-se três jovens do pagamento a aumentando-se o valor pago, teremos:*

$$\begin{aligned}(n-3)(p+19) &= 342\\ (n-3)(342/n+19) &= 342\\ \cancel{342}+19n-\frac{3\cdot342}{n}-57 &= \cancel{342}\\ 19n^2-57n-1126 &= 0\\ n^2-3n-54 &= 0.\end{aligned}$$

Como $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot(-54) = 225$, as raízes da equação anterior são:

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{3+15}{2}\\ n_1 &= 9\\ n_2 &= \frac{3-15}{2}\\ n_2 &= -6\end{aligned}$$

Contudo, apenas o 9 é admissível, pois como n representa o número de pessoas do grupo, trata-se de um número não negativo.

14. *As raízes de $x^2-5x+6=0$ são 2 e 3. Assim, podemos escrever $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Como $2<a<3$, segue que $a-2>0$ e $a-3<0$. Daí,*

$$a^2-5a+6=(a-2)(a-3)<0.$$

15. *Para que a equação não possua raízes reais, seu discriminante deve ser negativo, ou seja,*

$$\begin{aligned}a^2-4 &< 0\\ a^2 &< 4\\ |a| &< 2\end{aligned}$$

Assim, os possíveis valores de a são aqueles compreendidos entre -2 e 2.

16. *Para a equação possuir alguma raiz real, seu discriminante deve ser não-negativo, ou seja,*

$$4(k-1)^2-4(k+5)=4(k^2-3k-4)\geq 0.$$

Isso ocorre apenas de $k\geq4$ ou se $k\leq-1$. Supondo tais restrições, sejam a e b as raízes da equação original. Podemos fatorá-lo como $(x-a)(x-b)$. Temos:

a) Se 0 está entre as raízes se, e somente se, $k+5=(0-a)(0-b)<0$.

b) Ambas raízes são positivas se, e somente se, $ab=k+5>0$ e $2(k-1)=-(a+b)<0$.

c) Se 0 é uma raiz, $k+5=0$ e a outra raíz é $x=12>0$.

A interseção da restrição inicial com os três conjuntos encontrados anteriormente é o conjunto

$$S=\{x\in\mathbb{R}|x\leq-1\}.$$

2 Exercícios de Fixação

17. *Pela fórmula de Bhaskara, como $\sqrt{\Delta}=7$, temos:*

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-3+7}{-4}\\ &= -1\\ x_2 &= \frac{-3-7}{-4}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Portanto, a maior raiz é 5/2.

18. *Pela fórmula de Bhaskara, como $\sqrt{\Delta}=0$, ambas as raízes são iguais à:*

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-4)\pm0}{4}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Portanto, $S=\{1\}$.

19. *Substituindo* -3 *como raiz, temos:*

$$\begin{aligned}(-3)^2-7(-3)-2c &= 0\\ 9+21-2c &= 0\\ 9+21 &= 2c\\ 30 &= 2c\\ 2c &= 30\\ c &= 15.\end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x} &= 2\\ x^2+1 &= 2x\\ x^2-2x+1 &= 0\\ (x-1)^2 &= 0\\ x &= 1\end{aligned}$$

Portanto, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=1^2+\dfrac{1}{1^2}=2.$

21. *Inicialmente, devemos ter como condição necessária para a existência dos radicais que* $3x-2>0$ *e* $x>0$*, ou seja,* $x>3/2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2} &= \sqrt{x}+2\\ (\sqrt{3x-2})^2 &= (\sqrt{x}+2)^2\\ 3x-2 &= x+4\sqrt{x}+4\\ 2x-6 &= 4\sqrt{x}\\ (2x-6)^2 &= (4\sqrt{x})^2\\ 4x^2-24x+36 &= 16x\\ x^2-10x+9 &= 0\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são 1 *e* 9*. Como,* $x>3/2$*, devemos ter* $x=9$*. É fácil ver que tal valor satisfaz a equação dada e, portanto,* $S=\{9\}$.

22. *a)*

$$\begin{aligned}9x^4-13x^2+4 &= 0\\ 9y^2-13y+4 &= 0\\ y &= \frac{13\pm 5}{18}.\end{aligned}$$

No primeiro caso, $y=(13+5)/18=1^2$*, temos as raízes* $x=\pm 1$*. No segundo caso,* $y=(13-5)/18=(2/3)^2$*, temos* $x=\pm 2/3$*. Portanto, o conjunto solução é*

$$S=\{-1,1,-2/3,2/3\}.$$

b)

$$\begin{aligned}x^4+4x^2-60 &= 0\\ y^2+4y-60 &= 0\\ y &= \frac{-4\pm 16}{2}.\end{aligned}$$

No primeiro caso, $y=-2+8=(\sqrt{6})^2$*, temos as raízes* $x=\pm\sqrt{6}$*. O segundo caso,* $y=-2-8=-10$*, não produz raízes reais pois não existe um número real* x *tal que* $x^2=-10$*. Portanto, o conjunto solução é*

$$S=\{-\sqrt{6},\sqrt{6}\}.$$

c)

$$\begin{aligned}x^4+10x^2+9 &= 0\\ y^2+10y+9 &= 0\\ y &= \frac{-10\pm 8}{2}.\end{aligned}$$

Em ambos os casos, $y<0$ *e consequentemente não existirão raízes reais pois* $x^2\geq 0$ *para qualquer* $x\in\mathbb{R}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

23. *(Extraído da AIME) Sejam* $m=x+y$ *e* $n=xy$*. Como* $xy^2+x^2y=xy(x+y)$*, o sistema pode ser reescrito como:*

$$\begin{aligned}n+m &= 71\\ n\cdot m &= 880\end{aligned}$$

Da primeira equação, $n=71-m$*. Substituindo tal valor na segunda, temos:*

$$\begin{aligned}(71-m)\cdot m &= 880\\ 71m-m^2 &= 880\\ m^2-71m+880 &= 0\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são 55 *e* 16*. Vejamos cada caso:*

i) Se $m=55$*,* $n=16$ *e tem-se:*

$$\begin{aligned}x+y &= 55\\ xy &= 16\end{aligned}$$

Substituindo $y=55-x$ *na segunda equação obtemos:*

$$\begin{aligned}x(55-x) &= 16\\ x^2-55x+16 &= 0\end{aligned}$$

A equação anterior não possui raízes inteiras pois $\sqrt{\Delta}$ *é irracional. Portando,* $m=55$ *não serve.*

ii) Se $m=16$*,* $n=55$ *e tem-se:*

$$\begin{aligned}x+y &= 16\\ xy &= 55\end{aligned}$$

Daí,

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=256-110=146.$$

24. *Seja $y = x^2 - 3x + 1$. Observe que $y + x = (x-1)^2$. Assim,*

$$\begin{aligned}
(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 &= x \\
y^2 - 3y + 1 - x &= 0 \\
(y-1)^2 - y - x &= 0 \\
(y-1)^2 - (x-1)^2 &= 0 \\
(y-x)(y+x-2) &= 0 \\
(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Daí, $x^2 - 4x + 1 = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$ cujas raízes são:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \text{ e } x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Portanto, $S = \left\{2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{2}\right\}$.

25.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4 + 2x - x^2} &= x - 2 \\
4 + 2x - x^2 &= x^2 - 4x + 4 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0.
\end{aligned}$$

As possíveis raízes são $x = 0$ ou $x = 3$. Contudo, se $x = 0$, tem-se $\sqrt{4 + 2 \cdot 0 - 0^2} = 0 - 2$, um absurdo. É facil verificar que $x = 3$ satisfaz a equação. Portanto, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

Observação: A operação de elevar ambos os membros de uma equação ao quadrado gera uma nova equação que contém todas as soluções da equação anterior. Entretanto, novas soluções podem ter surgido e por essa razão é sempre importante verificar se os valores encontrados satisfazem a equação original.

26. *Se $a = -1$, temos:*

$$\sqrt{x^2 + 2ax - a} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|.$$

Assim, a igualdade se verificaria para qualquer $x \geq 1$. Suponhamos que $a \neq -1$, então

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 2ax - a} &= x - 1 \\
x^2 + 2ax - a &= x^2 - 2x + 1 \\
2x(a+1) &= a + 1 \\
x &= 1/2
\end{aligned}$$

É imediato verificar que $x = 1/2$ satisfaz a equação nesse caso. Portanto, $S = \{1/2\}$.

27. *Se algum dos coeficientes da equação anterior não é nulo, ela possuirá no máximo duas raízes pois terá grau no máximo dois. Sendo assim, devemos ter $a^2 - 3a + 2 = a^2 - 5a + 4 = a - a^2 = 0$. A única raiz comum às três equações anteriores é $a = 1$.*

28. *Suponha que a fração irredutível p/q, isto é p e q não possuem fatores primos em comum, seja raiz da equação dada. Susbtituindo tal raiz e multiplicando o resultado por q^2, temos:*

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c &= 0 \\
ap^2 + bpq + cq^2 &= 0
\end{aligned}$$

Se p ou q é par, na soma anterior, teremos dois números pares um ímpar cuja soma resultará em um número ímpar. Se ambos são ímpares, a soma anterior é constituída por três números ímpares e naturalmente sua soma será também ímpar. Em nenhum caso, a soma pode ser 0 pois ele é um número par.

29. *Seja $u = \sqrt{x}$, então*

$$\begin{aligned}
x &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} \\
x - 2 &= \sqrt{2 + \sqrt{x}} \\
u^2 - 2 &= \sqrt{2 + u} \\
(u^2 - 2)^2 &= 2 + u \\
(u^2 - 2)^2 - u - 2 &= 0.
\end{aligned}$$

A última equação pode ser fatorada como:

$$(u^2 - 2)^2 - u - 2 = (u^2 - u - 2)(u^2 + u - 1).$$

Como $x > 2$, segue que $u > \sqrt{2} > 1$. Analisando os raízes de $u^2 + u - 1$, nenhuma delas se enquandra nessa condição. Portanto, u é raiz de $u^2 - u - 2$. Tal equação possui raízes -1 e 2. Logo, como $u \geq 0$, devemo ter $u = 2$ e $x = u^2 = 4$. É fácil verificar que 4 é solução da equação original.

30. *Sejam $s = \sqrt[4]{x - 1}$ e $t = \sqrt[4]{5 - x}$. Então:*

$$\begin{aligned}
s + t &= 2 \\
s^4 + t^4 &= 4.
\end{aligned}$$

Usando a primeira equação, se $s = 1 + z$, temos $t = 1 - z$. Assim, substituindo ambos valores na segunda equação, obtemos $z^4 + 6z^2 - 1 = 0$. Resolvendo a equação biquadrada, podemos encontrar

$$z = \pm\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Como $x = (1+z)^4 + 1 = 3 + 4z(1 + z^2)$, podemos finalmente obter o conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x = 3 \pm 4(\sqrt{10} - 2)\sqrt{\sqrt{10} - 3}\}.$$

31. *(Extraído da Revista do Professor de Matemática, números 78 e 79) Seja x uma solução da equação. Então:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-\sqrt{5-x}} &= x\\
\left(\sqrt{5-\sqrt{5-x}}\right)^2 &= x^2\\
5-\sqrt{5-x} &= x^2\\
5-x^2 &= \sqrt{5-x}\\
\left(5-x^2\right)^2 &= \left(\sqrt{5-x}\right)^2\\
\left(5-x^2\right)^2 &= (5-x)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(5-x^2\right)^2 &= (5-x)\\
5^2-2\cdot 5\cdot x^2+x^4 &= 5-x\\
5^2-(2x^2+1)\cdot 5+(x^4+x) &= 0
\end{aligned}$$

Fixado x, o número 5 é raiz da equação do segundo grau:

$$z^2-(2x^2+1)\cdot z+(x^4+x)=0.$$

O discriminante da equação anterior é:

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-(2x^2+1)]^2-4\cdot 1\cdot(x^4+x)\\
&= 4x^4+4x^2+1-4x^4-4x\\
&= (2x+1)^2
\end{aligned}$$

Como $x>0$, $\sqrt{\Delta}=2x+1$. Como 5 é uma das raízes da equação, tem-se:

$$5=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}.$$

Temos dois casos a considerar:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+1+(2x+1)}{2} &= 5\\
x^2+x-4 &= 0\\
x &= \frac{-1\pm\sqrt{32}}{2}\\
\frac{2x^2+1-(2x+1)}{2} &= 5\\
x^2-x-5 &= 0\\
x &= \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}
\end{aligned}$$

Como $0<x<5$, precisa-se eliminar as duas raízes negativas. Além disso, é facil verificar que as outras duas satisfazem a equação original. Portanto,

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\frac{1+\sqrt{32}}{2}\right\}.$$

32. *(Extraído e Adaptado da Gazeta Matemática, Romênia)*

$$\begin{aligned}
(ax-b)^2+(bx-a)^2 &= x\\
a^2x^2-2abx+b^2+b^2x^2-2abx+a^2-x &= 0\\
(a^2+b^2)x^2+(-1-4ab)x+(a^2+b^2) &= 0
\end{aligned}$$

O seu discriminante vale:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-1-4ab)^2-4(a^2+b^2)(a^2+b^2)\\
&= (1+4ab)^2-[2(a^2+b^2)]^2\\
&= (1+4ab-2(a^2+b^2))(1+4ab+2(a^2+b^2))\\
&= (1-2(a-b)^2)(1+2(a+b)^2)
\end{aligned}$$

Como a equação possui ao menos uma raiz real, tem-se $\Delta\geq 0$. Além disso, $1+2(a-b)^2>0$ implica que $1-2(a-b)^2\geq 0$. Dado que $(a-b)\in\mathbb{Z}$, devemos ter $(a-b)^2=0$, ou seja, $a=b$. A equação se transforma em:

$$2a^2x-(1+4a^2)x+2a^2=0.$$

A soma das raízes será $x_1+x_2=\dfrac{1+4a^2}{2a^2}=2+\dfrac{1}{2a^2}$ e o produto $x_1\cdot x_2=1$. Seja x_1 a raiz inteira. Por inspeção direta na equação anterior, x_1 não pode ser nem 0 e nem 1. Logo, $x_1\geq 2$. Por outro lado, $x_2=1/x_1>0$ e daí $x_1<x_1+x_2<2+1/2a^2<3$. Consequentemente, $x_1=2$ e $x_2=\dfrac{1}{2}$. Finalmente, usando a soma das raízes, pode-se concluir que $a\in\{-1,1\}$. As únicas possibilidades são para $a=b=\pm 1$, com raízes 2 e $1/2$.

33. *(Extraído da Olimpíada Russa) Podemos usar a segunda operação e gerar o número $2z$. Usando a primeira operação, podemos decidir se z e $2z$ são iguais, ou seja, se z é ou não igual a zero. Suponha que tenhamos descoberto que z não é zero. Usando a terceira operação, analisemos as raízes de $x^2+2zx+z=0$ que são dadas por:*

$$x=-z\pm\sqrt{z^2-z}.$$

Como já sabemos que $z\neq 0$, o discriminante é nulo apenas quando $z=1$. Assim, se a calculadora disser que existe apenas uma raiz real, saberemos que $z=1$ e, no caso contrário, teremos $z\neq 1$.

34. *a) Se $x\geq 0$, a equação se transforma em $x^2-x-2=0$ cujas raízes são -1 e 2. Apenas a raiz 2 convém. Se $x<0$, a equação se transforma em $x^2+x-2=0$ cujas raízes são -2 e 1 e apenas -2 convém. Logo, as raízes são 2 e -2.*

b) Se $x\geq 0$, a equação se transforma em $x^2+5x+4=0$ cujas raízes são -1 e -4. Nenhuma das duas convém. Se $x<0$, a equação se transforma em $x^2-5x+4=0$ cujas raízes são 1 e 4. Novamente nenhuma das duas raízes convém. Logo, a equação não possui raízes.

35. *Veja que as raízes $y = 3$ e $y = -3$ aparecem tanto em $(y^2 - 9)$ quanto em $(y^2 - 6y + 9)(y^2 + y - 6)$. Assim, podemos fatorar a expressão:*

$$\begin{aligned}
(y^2 + y - 6)(y^2 - 6y + 9) - 2(y^2 - 9) &= 0\\
(y - 3)(y + 2)(y + 3)(y + 3) - 2(y - 3)(y + 3) &= 0\\
(y - 3)(y + 3)[(y + 2)(y + 3) - 2] &= 0\\
(y - 3)(y + 3)(y^2 + 5y + 4) &= 0\\
(y - 3)(y + 3)(y + 1)(y + 4) &= 0.
\end{aligned}$$

As raízes são $y = 3$, $y = -3$, $y = -1$ ou $y = -4$.

36. *Se $r^2 + 5r - 24 = 0$, ambos os lados são nulos e a igualdade naturalmente ocorre. As raízes da equação anterior são $r = -8$ e $r = 3$. Se $r^2 + 5r - 24 \neq 0$, podemos cancelar tal termo obtendo:*

$$\begin{aligned}
r^2 - 3r + 2 &= 4r - 10\\
r^2 - 7r + 12 &= 0.
\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $r = 4$ e $r = 3$. Portanto, os possíveis valores de r são: -8, 4 e 3.

37. *As raízes da equação são dadas por $r = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ cujo valor máximo é $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$ e o mínimo é o seu simétrico. Se y é um raiz de tal equação e a é tal que $|a| \leq 1$, então $z = ay$ é uma raiz de $x^2 + pax + qa^2$ e os coeficientes ainda estão em $[-1, 1]$. Consequentemente, todos os os números do intervalo $[-\alpha, \alpha]$ podem ser raízes de tais equações e, como vimos no início, nenhum outro número fora deste intervalo pode ser.*

38. *Elevando ambos os lados ao quadrado:*

$$\begin{aligned}
2(x - 3) &= \sqrt{x^2 - 2x + 3}\\
4(x - 3)^2 &= (x - 3)(x + 1)\\
4(x - 3)^2 - (x - 3)(x + 1) &= 0\\
(x - 3)(3x - 13) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, os candidatos a soluções são $x = 3$ e $x = \dfrac{13}{3}$. É fácil verificar que ambos satisfazem a equação original.

39. *Multiplicando ambos os lados por $(x - 2)^2$, temos:*

$$\begin{aligned}
x^2(x - 2)^2 + 4x^2 &= 12(x - 2)^2\\
(x^2)^2 - 4x^2(x - 2) - 12(x - 2)^2 &= 0\\
(x^2 + 2(x - 2))(x^2 - 6(x - 2)) &= 0.
\end{aligned}$$

Analisando as raízes das equações anteriores, apenas a primeira delas possui raízes reais que são: $-1 \pm \sqrt{5}$.

40.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0\\
a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] &= 0\\
a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] &= 0\\
a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] &= 0\\
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] &= 0\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

41. *Sim, é verdade. Os três números reais que verificam a equação anterior são raízes da equação*

$$(a - m)x^2 + (b - n)x + (c - p).$$

Se $a - m \neq 0$, tal equação possui no máximo duas raízes distintas e isso contradiz a hipótese inicial. Se $a - m = 0$ e $b - n \neq 0$, teríamos uma equação do primeiro grau que possui solução única e novamente temos um absurdo. Finalmente, supondo então que $a - m = b - n = 0$, a equação só possui raízes caso tenhamos também $c - p = 0$. Ou seja, as três igualdades mencionadas no enunciado devem se verificar.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM