**Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas**

**Noções Básicas - Parte 2**

**Nono Ano - Fundamental**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

# 1 Função real de variável real

Nesta seção, estudaremos funções que têm grande importância, tanto em Matemática quanto em aplicações: as *funções reais de variável real*. Como de costume, usaremos a letra $\mathbb{R}$ para denotar o conjunto dos números reais.

> Seja $f : A \to B$ uma função. Se $A \subset \mathbb{R}$, dizemos que $f$ **tem variável real**. Se $B \subset \mathbb{R}$, dizemos que $f$ é uma **função real**.

Dessa forma, dizemos que uma função $f : A \to B$ *é real de variável real*, se o seu domínio $A$ e seu contra-domínio $B$ são ambos formados por números reais. Neste material, lidaremos somente com funções reais de uma variável real, às quais nos referiremos simplesmente como *funções*.

A seguir, vamos apresentar uma maneira geométrica bastante eficiente de representar uma função. Precisamos de algumas definições preliminares.

Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par $(a, b)$ é chamado **par ordenado**. A principal diferença entre o par ordenado $(a, b)$ e o conjunto $\{a, b\}$ é que, enquanto para conjuntos ocorre $\{a, b\} = \{b, a\}$, para pares ordenados temos $(a, b) \neq (b, a)$, ou seja, em um par ordenado, a *ordem* em que os elementos aparecem é relevante.

**Exemplo 1.** *Os pares ordenados $(x + y, 1)$ e $(3, x - y)$ são iguais. Calcule $x$ e $y$.*

**Solução.** Para que $(x + y, 1) = (3, x - y)$, devemos ter $x+y = 3$ e $x-y = 1$. Resolvendo esse sistema, encontramos $x = 2$ e $y = 1$. □

O primeiro elemento $a$ do par ordenado $(a, b)$ é chamado **abscissa** e o segundo elemento $b$ do par ordenado $(a, b)$ é chamado **ordenada**. Uma vez que os pares ordenados $(a, b)$ e $(c, d)$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$, concluímos que eles são iguais se, e só se, se têm as mesmas abscissas e ordenadas.

O **produto cartesiano**[1] dos conjuntos $A$ e $B$, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b)$, com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}. \tag{1}$$

**Exemplo 2.** *Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, então*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d),$$
$$(3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}.$$

Nem sempre é possível listar todos os elementos de um produto cartesiano. Veja o exemplo a seguir.

[1] O nome "cartesiano" vem de *Cartesius*, que é uma forma latinizada do sobrenome do matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), pioneiro no estudo do que chamamos hoje de Geometria Analítica.

**Exemplo 3.** *Por definição, temos*

$$[1, 2] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}.$$

*Assim, o produto cartesiano $[1, 2] \times [0, 1]$ é um conjunto infinito de pares ordenados, e pode ser mostrado (muito embora isso esteja além dos propósitos destas notas) que não podemos listar tais pares em sequência.*

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pode ser identificado com o plano através da construção que faremos a seguir.

Uma reta cujos pontos estão identificados com os números reais é chamada **reta numérica**, **reta real** ou **eixo**. Tal identificação é feita pela escolha de um ponto da reta para denotar o número 0, uma semirreta (das que começam em 0) para conter os números positivos e um segmento de reta cujo comprimento representará uma unidade.

Uma vez feita a identificação acima, usaremos os números reais para denominar os pontos de uma reta numérica. Por exemplo, escrevemos "ponto 3" para nos referirmos ao ponto da reta associado ao número 3.

Considere duas retas reais $X$ e $Y$, perpendiculares, tais que seu ponto de interseção $O \in X \cap Y$ seja o ponto 0 em ambas as retas (veja a figura 1). Também é conveniente supor que o comprimento do segmento que liga os pontos 0 e 1 seja o mesmo nas duas retas. Isso equivale a assumir que os dois eixos estão *na mesma escala*.

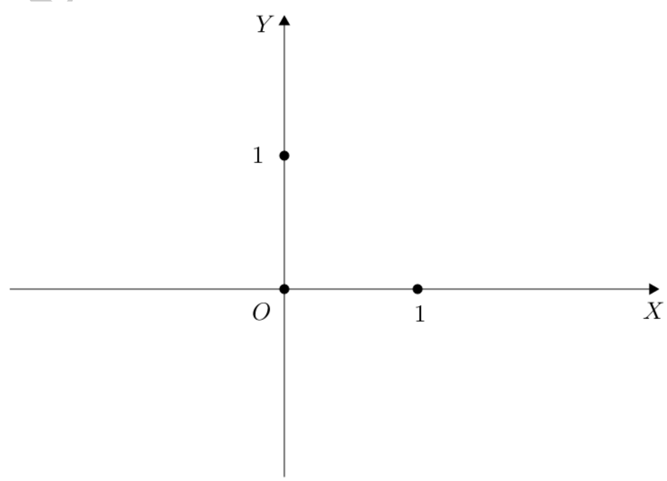


Figura 1: sistema cartesiano de eixos no plano.

Convenciona-se posicionar as retas reais $X$ e $Y$ de modo que $X$ fique na horizontal e $Y$ na vertical. Além disso, supõe-se, também por convenção, que $X$ esteja orientado da esquerda para a direita e $Y$ de baixo para cima. Isso quer dizer que, em $X$, o ponto 1 está à direita do ponto 0, e em $Y$ o ponto 1 está acima do ponto 0.

Consideremos, agora, um ponto $P$ pertencente a um plano onde foram escolhidos e fixados dois eixos, como na figura 1. Tracemos, pelo ponto $P$ as retas paralelas aos dois eixos. A reta que passa por $P$ e é paralela ao eixo $Y$ intersecta o eixo $X$ no ponto $P'$ e a reta que passa por $P$ e é paralela ao eixo $X$ intersecta o eixo $Y$ no ponto $P''$ (veja a figura 2).

Seja $x$ o número real correspondente ao ponto $P'$ e seja $y$ o número real correspondente ao ponto $P''$ (na figura 2, $x$ e $y$ são positivos). Obtemos, assim, um par ordenado $(x, y)$ de números reais associado ao ponto $P$. Observe que o *axioma das paralelas* garante que a reta paralela a $Y$ passando por $P$ é única; logo, o ponto $P'$ e o número real $x$ são determinados de modo único pelo ponto $P$. Da mesma forma, o axioma das paralelas também garante que $P''$ e $y$ dependem apenas de $P$. Assim, o par ordenado $(x, y)$ associado ao ponto $P$ é único.

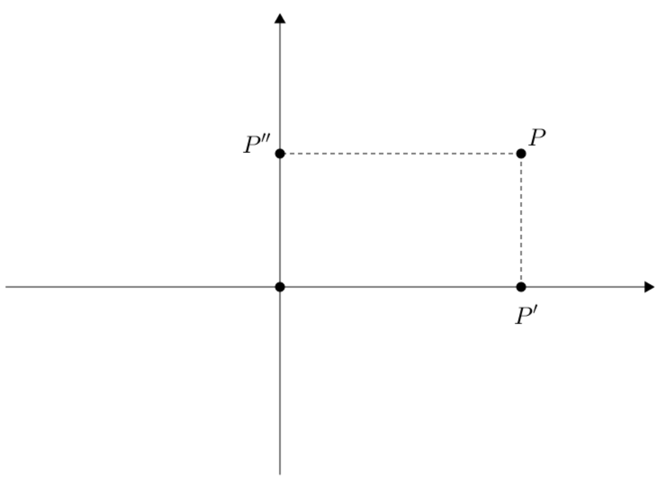


Figura 2: determinação das coordenadas do ponto $P$.

Reciprocamente, dado um par ordenado $(x, y)$ de números reais, a reta $r$, paralela ao eixo $Y$ e passando por $x$, intersecta a reta $s$, paralela ao eixo $X$ e passando por $y$. Além disso, o ponto de interseção das retas $r$ e $s$ é exatamente o ponto $P$ que, pela construção anterior, gera o par ordenado $(x, y)$.

A discussão acima garante que há uma correspondência bijetiva entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, estabelecida como descrito. Essa correspondência permite que associemos objetos algébricos, como pares ordenados e equações, a objetos geométricos, como pontos e curvas. Essa é a ideia básica de um método, chamado *Geometria Analítica*, criado pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) e desenvolvido e popularizado pelo filósofo e matemático, também francês, René Descartes.

O plano identificado com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é chamado **plano cartesiano**, em homenagem a Descartes (veja a nota de rodapé na página anterior). O eixo $X$ é também chamado **eixo das abscissas**, ao passo que o eixo $Y$ é chamado **eixo das ordenadas**.

Os eixos $X$ e $Y$ dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (veja a figura 3). O primeiro quadrante corresponde aos pontos $(x, y)$ com ambas as coordenadas positivas: $x > 0$ e $y > 0$. O segundo quadrante corresponde aos pontos com abscissa negativa e ordenada positiva: $x < 0$ e $y > 0$. O terceiro quadrante corresponde aos pontos com abscissa e ordenada negativas: $x < 0$ e $y < 0$. Finalmente, o quarto quadrante é o conjunto dos pontos que têm abscissa positiva e ordenada negativa: $x > 0$ e $y < 0$.

Os pontos que têm abscissa nula, isto é, os pontos do tipo $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são exatamente os pontos do eixo $Y$. Já os pontos que têm ordenada nula, $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, formam o eixo $X$. Assim, podemos escrever:

$$X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \ \text{ e } \ Y = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

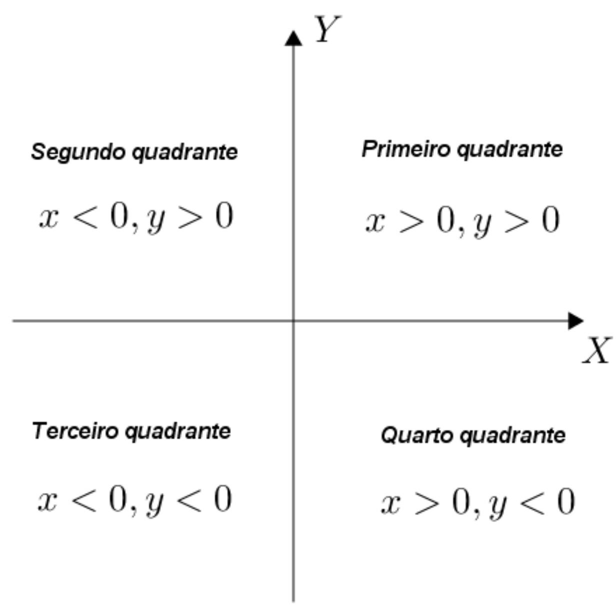


Figura 3: os quatro quadrantes de um plano cartesiano.

Consideremos, agora, uma função $f : A \to B$. Para cada $a \in A$, existe um único $f(a) \in B$, logo, existe um único par ordenado $(a, f(a)) \in A \times B$. O conjunto de todos os pares ordenados desse tipo é chamado **gráfico** da função $f$. Usaremos a notação $\mathrm{gr}(f)$ para designar o gráfico de $f$.

$$\mathrm{gr}(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}. \qquad (2)$$

Se $f : A \to B$ é uma função real de variável real, isto é, se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, então podemos representar o gráfico da função $f$ geometricamente, como um subconjunto do plano cartesiano: $\mathrm{gr}\,(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**Exemplo 4.** *O gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x + 1$*, é a reta determinada pelos pontos* $(0, 1)$ *e* $(1, 3)$*.*

**Prova.** Para provar a afirmação acima, precisamos mostrar que um ponto $(x, y)$ pertence ao gráfico de $f$ se, e somente se, pertence à reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$. Sejam, pois, $A$ o ponto $(1, 0)$, $C$ o ponto $(0, 3)$ e $E$ o ponto $(0, 1)$ (veja a figura 4).

Primeiramente, tomemos $(x, y) \in \mathrm{gr}(f)$. Logo, $(x, y) = (x, f(x))$, isto é, $y = f(x) = 2x + 1$. Se $B$ é o ponto $(x, 0)$ e $D$ é o ponto $(0, y)$, então (veja novamente a figura 4) $\overline{AB} = x - 1$ e $\overline{CD} = y - 3 = 2x + 1 - 3 = 2x - 2 = 2(x - 1)$. Assim, $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$.

Por outro lado, ainda na figura 4, $\overline{OA} = 1 - 0 = 1$ e $\overline{EC} = 3 - 1 = 2$. Assim, $\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{2}{1} = 2$.

Portanto,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OA}}$$

e, como os triângulos tracejados na figura 4 são retângulos, concluímos que eles são semelhantes, pelo caso LAL de semelhança de triângulos.

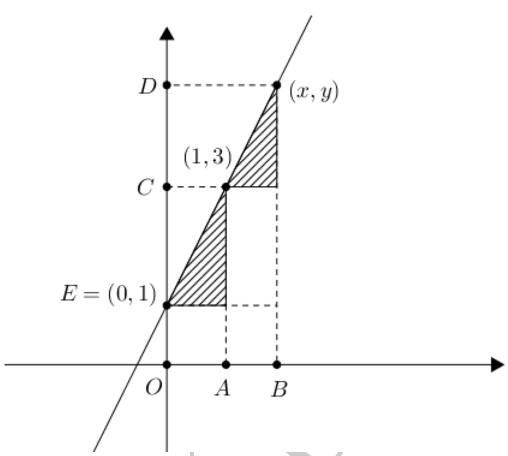


Figura 4: o gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$.

Em particular, as hipotenusas desses triângulos retângulos formam ângulos iguais com a horizontal. Por sua vez, isso significa que os pontos $(x, y)$, $(1, 3)$ e $(0, 1)$ são colineares, ou seja, que $(x, y)$ pertence à reta que passa por $(0, 1)$ e $(1, 3)$.

Reciprocamente, se o ponto $(x, y)$ pertence à reta determinada pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$, então os triângulos trcejados na figura 4 são semelhantes, pois seus ângulos agudos, sendo correspondentes, são congruentes.

Dessa forma, os catetos desses dois triângulos são proporcionais, ou seja,

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{3-1}{1-0} = 2.$$

Da igualdade acima, segue que $y - 3 = 2x - 2$, ou seja, $y = 2x + 1$. Portanto o ponto $(x, y)$ é da forma $(x, 2x + 1) = (x, f(x))$ e, por isso, pertence ao gráfico de $f$. $\square$

No módulo sobre funções afins, veremos que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a$ e $b$ constantes, é sempre uma reta. A ideia para provar esse fato é a mesma que usamos no exemplo anterior.

## 2 Composição de funções

Consideremos duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, de sorte que o contradomínio de $f$ coincide com o domínio $C$ de $g$. Para cada $a \in A$, a imagem $f(a)$, sendo um elemento do contradomínio de $f$, pertence ao conjunto $B$; logo, podemos aplicar a função $g$ a $f(a)$ para obtermos $g(f(a)) \in C$.

uma função $h : A \to C$, que leva $a$ diretamente a $g(f(a))$, ou seja, $h(a) = g(f(a))$ (veja a figura 5). A função $h$ resulta da combinação, ou *composição* das funções $f$ e $g$ e, por isso, é chamada de **função composta** de $f$ e $g$.

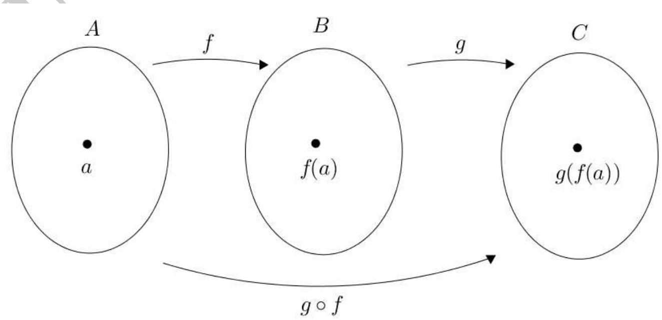


Figura 5: a função composta $g \circ f$.

Usamos a notação $h = g \circ f$ (lê-se "$g$ bola $f$") para indicar a composição de $f$ e $g$. Devemos notar que a ordem em que se aplicam as funções $f$ e $g$ na composta $g \circ f$ é dada da direita para esquerda, ou seja, para calcular $h(a) = (g \circ f)(a)$, aplicamos primeiro a função mais à direita, $f$, para obtermos $f(a)$, e depois aplicamos $g$ a $f(a)$ para obtermos $h(a) = g(f(a))$.

A composição de funções é uma *operação binária* entre funções, ou seja, dadas duas funções $f$ e $g$ tais que o contradomínio de $f$ coincide com o domínio de $g$, a composta de $f$ e $g$ é uma nova função $g \circ f$. Dessa forma, faz sentido perguntarmos que propriedades essa operação possui.

Começamos observando que a composição de funções não é necessariamente *comutativa*. Isso significa que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. Bem entendido, sendo $f : A \to B$ e $g : B \to C$, podemos formar $g \circ f : A \to C$, mas talvez nem possamos formar $f \circ g$ (basta que $C \neq A$). Entretanto, ainda que $C = A$ (e que, portanto, também possamos formar $f \circ g$), pode ocorrer que $g \circ f \neq f \circ g$, como mostra o exemplo a seguir. Assim, a ordem em que se aplicam as funções é relevante para o resultado da composição.

**Exemplo 5.** *Sejam* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ *as funções dadas por* $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = \frac{x}{4}$. *Note que* $\operatorname{Im} f = [0,3] \subset [0,4]$, *de forma que podemos considerar* $f$ *como uma função de* $[0,1]$ *em* $[0,4]$. *Também,* $\operatorname{Im} g = [0,1]$ *está contida em (na verdade é igual a)* $[0,1]$, *de modo que podemos ver* $g$ *como uma função de* $[0,4]$ *em* $[0,1]$.

*Vendo* $f : [0,1] \to [0,4]$ *e* $g : [0,4] \to [0,1]$, *temos* $f \circ g \neq g \circ f$. *De fato,* $f \circ g$ *é uma função de* $[0,4]$ *em si mesmo, ao passo que* $g \circ f$ *é uma função de* $[0,1]$ *em si mesmo. Assim,* $f \circ g \neq g \circ f$ *(por exemplo, podemos calcular* $(f \circ g)(2)$ *mas não* $(g \circ f)(2)$, *uma vez que* 2 *não pertence ao domínio de* $g \circ f$*).*

Dadas funções $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$ e $f_3 : C \to D$, podemos considerar as funções compostas $g = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 : A \to D$, dada por $g = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$, e $h = f_3 \circ (f_2 \circ f_1) : A \to D$, dada por $h(x) = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$. Em ambos os casos, podemos escrever, para $x \in A$,

$$\begin{aligned} h(x) &= (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = f_3((f_2 \circ f_1)(x)) \\ &= f_3(f_2(f_1(x))) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) \\ &= ((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(x) = g(x). \end{aligned}$$

Assim, temos $g = h$ ou, o que é o mesmo,

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

Em outras palavras, a composição de funções é uma operação **associativa**.

Para quatro ou mais funções, podemos calcular a composta de modo similar, contanto que o contradomínio de cada função (que não aquela mais à esquerda) seja igual ao domínio da função imediatamente à esquerda.

Um caso particular importante é aquele em que consideramos a composta $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, onde $f : A \to A$ é uma função de um conjunto $A$ nele mesmo. Neste caso, costumamos denotar a composta por $f^{(n)}$. Assim, $f^{(1)} = f$, $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ etc.

**Exemplo 6.** *Seja* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *dada por*

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{2}{x} \right).$$

*Calcule* $f(1), f^{(2)}(1), f^{(3)}(1), f^{(4)}(1)$ *e* $f^{(5)}(1)$.

**Solução.** Calculando os valores pedidos, obtemos:

$$f(1) = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$f^{(2)}(1) = f(f(1)) = f(3/2) = \frac{17}{12} \cong 1,41666666666666;$$

$$f^{(3)}(1) = f(f^{(2)}(1))) = f(17/12) = \frac{577}{408} \cong 1,41421568627451;$$

$$f^{(4)}(1) = f(f^{(3)}(1)) = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665857}{470832} \cong 1,41421356237469;$$

$$f^{(5)}(1) = f(f^{(4)}(1)) = f\left(\frac{665857}{470832}\right) = \frac{886731088897}{627013566048} \cong$$
$$\cong 1,414213562373095.$$

É possível provar que esses números formam uma sequência que se aproxima mais e mais de $\sqrt{2}$. Por exemplo, $f^{(4)}(1)$ é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com oito casas decimais exatas. Use uma calculadora para encontrar um valor aproximado de $\sqrt{2}$ e compare com $f^{(5)}(1)$. $\square$

Dado um conjunto não vazio $A$, podemos considerar a função $I_A : A \to A$, dada por $I_A(a) = a$. Essa função é chamada **função identidade** de $A$. Ela é o **elemento neutro** da operação de composição de funções. Isso significa que, para uma função $f : A \to B$, temos $f \circ I_A = f$; realmente,

$$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

para todo $a \in A$, de forma que $f \circ I_A = f$. Analogamente, se $I_B$ é a função identidade de $B$, então $I_B \circ f = f$, uma vez que

$$(I_B \circ f)(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

para todo $a \in A$.

Uma função $f : A \to A$ que satisfaz a condição $f^{(2)} = f$, ou seja, $f \circ f = f$ é chamada de **projeção** de $A$ sobre $\operatorname{Im} f$. vejamos um exemplo que justifica essa nomenclatura.

**Exemplo 7.** *Consideremos a função* $P_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *dada por* $P_x(a,b) = (a,0)$. *Temos:*

$$P_x^{(2)}(a,b) = P_x(P_x(a,b)) = P_x(a,0) = (a,0) = P_x(a,b),$$

*para todo par ordenado* $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *De modo análogo, podemos definir* $P_y : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *dada por* $P_y(a,b) = (0,b)$. *A função* $P_y$ *também é uma projeção:* $P_y^{(2)} = P_y$. *Podemos interpretar geometricamente essas funções como projeções ortogonais do plano cartesiano sobre cada um de seus eixos:* $P_x$ *é a projeção sobre o eixo* $X$ *e* $P_y$ *é a projeção sobre o eixo* $Y$.

## 3 Função inversa

Vamos relembrar as definições de função injetiva e sobrejetiva, vistas na parte 1 desta aula: uma função $f : A \to B$ é dita em injetiva se elementos distintos do domínio têm imagens diferentes, ou seja, se $a_1, a_2 \in A$ e $a_1 \neq a_2$, então $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetiva* se todo elemento do contradomínio $B$ é imagem de algum elemento do domínio $A$, isto é, se dado $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Quando uma função é injetiva e sobrejetiva, dizemos que ela é *bijetiva.*

Dizemos que uma função $g : B \to A$ é uma **inversa à esquerda** da função $f : A \to B$, se $g \circ f = I_A$, onde $I_A$ é a função identidade de $A$.

Dizemos que uma função $h : B \to A$ é uma **inversa à direita** da função $f : A \to B$, se $f \circ h = I_B$, onde $I_B$ é a função identidade de $B$.

Dizemos que uma função $k : B \to A$ é uma **inversa bilateral** da função $f : A \to B$, se $k \circ f = I_A$ e $f \circ k = I_B$.

O próximo resultado relaciona os conceitos definidos acima.

**Teorema 8.** *Consideremos uma função $f : A \to B$.*

*(a) $f$ é injetiva se, e somente se, admite uma inversa à esquerda.*

*(b) $f$ é sobrejetiva se, e somente se, admite uma inversa à direita.*

*(c) Se $f$ é bijetiva, então existe uma única função que é inversa bilateral de $f$.*

**Prova.**
(a) Supondo que $f : A \to B$ é injetiva, vamos construir uma inversa à esquerda de $f$.

Para definir uma função $g : B \to A$, precisamos especificar qual é a imagem por $g$ de um ponto $b \in B$. Caso $b \in \operatorname{Im} f$, como $f$ é injetiva, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Assim, neste caso é natural definirmos $g(b) = a$. Por outro lado, se $b \notin \operatorname{Im} f$, podemos escolher um elemento qualquer $a_0 \in A$ para ser a imagem de $b$ por $g$ (veja a figura 6).

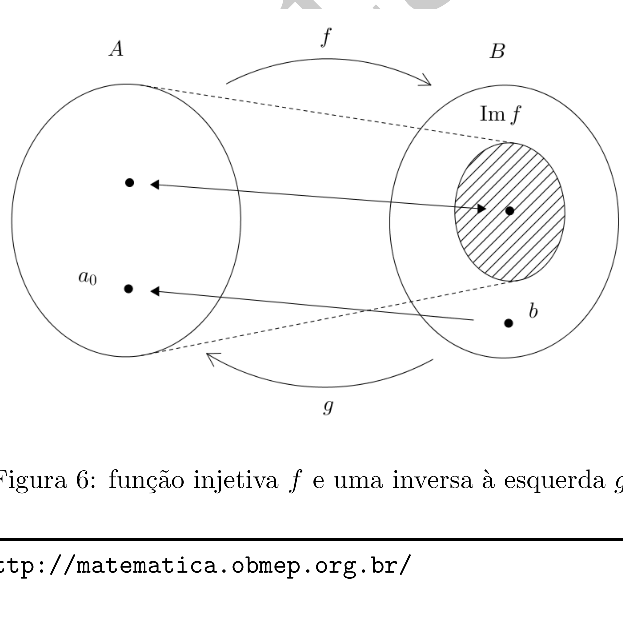


Figura 6: função injetiva $f$ e uma inversa à esquerda $g$.

Assim, escolhido e fixado um elemento $a_0 \in A$, a função $g : B \to A$ é dada por

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{se} \quad b = f(a) \\ a_0 & \text{se} \quad b \notin \operatorname{Im} f \end{cases}.$$

Consideremos, agora, a composta $g \circ f : A \to B$. Dado $a \in A$, temos por construção que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$. Logo, $g \circ f = I_A$ e $g$ é uma inversa à esquerda de $f$. Devemos observar que a função $g$ não é única, pois depende da escolha do elemento $a_0$.

Reciprocamente, suponha que $f : A \to B$ admite uma inversa à esquerda $g : B \to A$. Vamos mostrar que $f$ é injetiva. De fato, dados $a_1, a_2 \in A$ tais que $f(a_1) = f(a_2)$, temos $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, ou seja, $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Mas, como $g \circ f = I_A$, a última igualdade nos dá $I_A(a_1) = I_A(a_2)$, isto é, $a_1 = a_2$. Portanto, dois elementos de $A$ têm imagens iguais por $f$ somente se são iguais, o que mostra que $f$ é injetiva.

(b) Vamos, agora, supor que $f : A \to B$ é sobrejetiva. Queremos construir uma inversa à direita $h : B \to A$. Como $f$ é sobrejetiva, dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ (veja a figura 7). Observe que tal elemento $a$ não é, necessariamente, único. Então, denotando por $f^{-1}(b)$ o conjunto (não vazio, graças à sobrejetividade de $f$) formado por todos os elementos de $A$ cuja imagem é $b$, definimos $h : B \to A$ pondo

$$h(b) = a, \text{ para algum } a \in f^{-1}(b).$$

Definida dessa forma, a função $h$ é uma inversa à direita de $f$, pois, dado $b \in B$, a escolha de $a = h(b)$ garante que

$$(f \circ h)(b) = f(h(b)) = f(a) = b.$$

Logo, $f \circ h = I_B$.

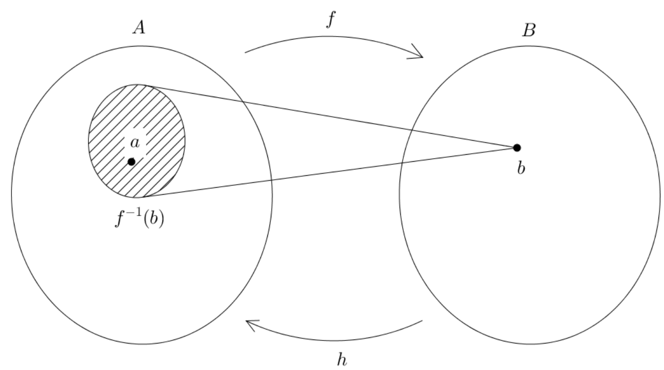


Figura 7: função sobrejetiva $f$ e uma inversa à direita $h$.

Reciprocamente, suponhamos que $f : A \to B$ admite uma inversa à direita $h : B \to A$. Dado $b \in B$, precisamos mostrar que $b$ pertence à imagem de $f$. Para tanto, sendo $a = h(b) \in A$, temos que

$$f(a) = f(h(b)) = (f \circ h)(b) = I_B(b) = b.$$

Logo, $f$ é sobrejetiva.

(c) Se $f : A \to B$ é bijetiva, então, por ser injetiva, ela admite uma inversa à esquerda $g : B \to A$; por outro lado, por ser sobrejetiva, ela admite uma inversa à direita $h : B \to A$. Então, graças à associatividade da operação de composição, temos:

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h.$$

Assim, $g = h$ é uma inversa bilateral de $f$.

Por outro lado, se $k_1 : B \to A$ e $k_2 : B \to A$ forem duas inversas bilaterais de $f$, então

$$k_1 = k_1 \circ I_B = k_1 \circ (f \circ k_2) = (k_1 \circ f) \circ k_2 = I_A \circ k_2 = k_2.$$

$\square$

O item (c) do teorema anterior mostra que a inversa bilateral de uma bijeção $f : A \to B$ é única, de forma que, doravante, vamos denotá-la por $f^{-1} : B \to A$, e denominá-la simplesmente de **função inversa** de $f$. A demonstração do teorema anterior também deixa claro que, para $x \in A$ e $y \in B$,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y). \tag{3}$$

A utilização da notação $f^{-1}$ para a função inversa de uma bijeção não deve causar confusão com a notação $f^{-1}(b)$, utilizada ao longo da demonstração do item (b) do teorema, uma vez que utilizaremos sistematicamente a notação $f^{-1}$ somente no contexto de inversas bilaterais.

A seguir, vamos estudar a relação entre o gráfico de uma função bijetiva real de variável real, e o gráfico de sua inversa.

Primeiramente, vejamos a relação entre os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (b, a)$ do plano cartesiano (observe a figura 8). Nesse sentido, afirmamos, inicialmente, que o ponto médio $M$ do segmento $PQ$ tem coordenadas $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Para entender a razão pela qual as coordenadas de $M$ são essas, procure na figura 8 dois triângulos retângulos semelhantes, um com hipotenusa $PQ$ e o outro com hipotenusa $PM$; então, use a semelhança para encontrar os catetos do triângulo menor.

Como a abscissa e a ordenada do ponto $M$ são iguais, este ponto pertence á reta $r = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, a qual é precisamente a **bissetriz dos quadrantes ímpares** (o primeiro e terceiro quadrantes) do plano cartesiano.

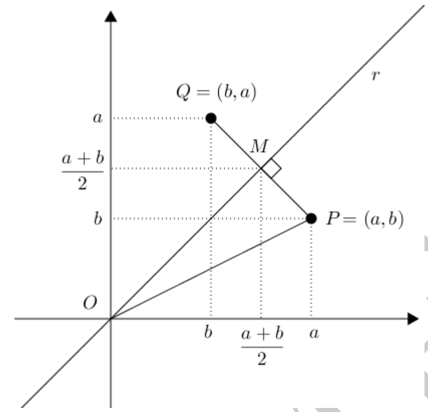


Figura 8: a reta $r$ é a mediatriz do segmento $PQ$.

Além disso, o triângulo $OPM$ é retângulo em $M$. Para provar isso, usemos, primeiramente, o Teorema de Pitágoras três vezes: $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{PM}^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ e $\overline{OM}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Assim,

$$\begin{aligned}\overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 &= 2 \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\ &= \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{2}\\ &= a^2 + b^2 = \overline{OP}^2.\end{aligned}$$

Logo, a recíproca do Teorema de Pitágoras garante que $O\widehat{M}P = 90°$, e a reta $r$ é a *mediatriz* do segmento $PQ$.

Resumidamente, a discussão acima nos diz que os pontos $(a, b)$ e $(b, a)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Consideremos, agora, uma função bijetiva $f : A \to B$, real de variável real, isto é, tal que $A, B \subset \mathbb{R}$. Como $f$ é bijetiva, o Teorema 8 garante que existe uma única inversa $f^{-1} : B \to A$.

Os gráficos de $f$ e de $f^{-1}$ são os seguintes conjuntos de pontos do plano:

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\},$$

$$\text{gr}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in B\}.$$

Pondo $y = f(x)$, segue de (3) que $x = f^{-1}(y)$. Portanto, temos que $(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x)$, de sorte que $(x, f(x))$ e $(y, f^{-1}(y))$ (com $y = f(x)$) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

A discussão acima provou o seguinte resultado.

**Teorema 9.** *Seja $f : A \to B$ uma função real de variável real. Se $f$ é bijetiva, então os gráficos* $\text{gr}(f)$ *e* $\text{gr}(f^{-1})$ *são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.*

A figura abaixo ilustra o teorema acima no caso em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a bijeção dada por $f(x) = x^3$. Nesse caso, temos

$$\text{gr}(f) = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhendo vários valores de $x$ (por exemplo, fazendo $x$ variar de $-3$ a $3$ em intervalos de comprimento $0,2$) e marcando aproximadamente os pontos correspondentes no plano cartesiano, obtemos a curva vermelha da figura 9. Traçando a curva simétrica a ela em relação à bissetriz $r$ dos quadrantes ímpares, obtemos o gráfico de $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

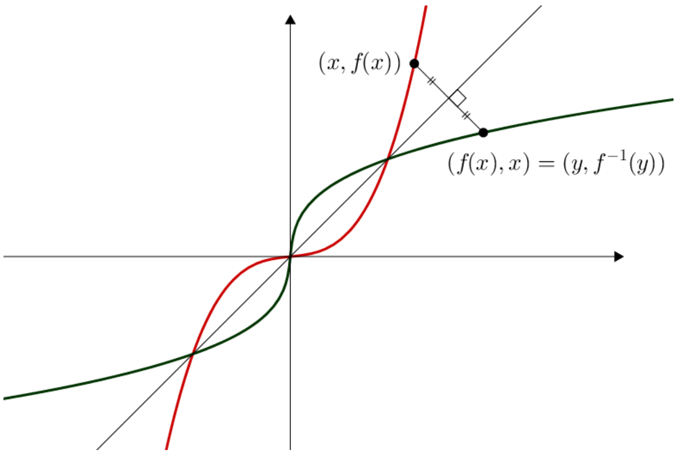


Figura 9: gráfico da bijeção $f$ e de sua inversa $f^{-1}$.

Nesse caso, veja que para $y = f(x) = x^3$, temos

$$f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y}.$$

Assim, a curva simétrica à curva vermelha em relação a $r$ é o gráfico de $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

## Dicas para o Professor

São necessários pelo menos 5 encontros de 50 minutos cada para cobrir o material desta aula. O assunto é suficientemente importante para que sejam dedicados a ele tempo e cuidado maiores.

A prova de que o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x+1$ é uma reta deve ser trabalhada com bastante cuidado, enfatizando os aspectos geométricos (semelhança de triângulos). A semelhança também é chamada de afinidade, o que motiva a escolha do nome *afim* para as funções com lei de formação do tipo $f(x) = ax + b$.

Você pode, num primeiro momento, apenas enunciar o Teorema 8, ilustrando-o através de exemplos. Considere algumas funções injetivas que não são sobrejetivas e outras que são sobrejetivas, mas não injetivas, explore a não unicidade das inversas laterais, exibindo várias inversas para uma mesma função (não bijetiva). Depois, volte ao teorema e tenta demonstrá-lo com seus alunos, à luz dos exemplos estudados.

A simetria entre os gráficos de uma função bijetiva e de sua inversa também pode ser explorada por meio de exemplos. Se for possível, use um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, para facilitar a visualização e a manipulação das funções. Depois de experimentar bastante com exemplos, o estudante ficará mais à vontade para estudar os gráficos de funções e de suas inversas.

Os capítulos 1 e 2 de [1], juntamente com [2] e [3], contém muito mais sobre funções do que tratamos aqui. Sugerimos ao leitor consultar essas fontes como seguimento natural a estas notas.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro,

2. G. Iezzi. *Elementos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, São Paulo, 2013.

3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 1998. 2012.