Módulo Funções - Noções Básicas

Resolução de Exercícios

9° **ano E.F.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Funções - Noções Básicas
Resolução de Exercícios

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Três amigos conversavam sobre suas matérias preferidas dentre quatro: matemática (M), português (P), história (H) e geografia (G), sendo que Alberto (A) prefere matemática, Beto (B) prefere português e Carlos (C) prefere geografia (G). Sejam os conjuntos $T = \{A, B, C\}$, formado pelos três amigos, e $Q = \{M, P, G, H\}$, formado pelas matérias em discussão, pode-se dizer que a função $f : T \to Q$ é:

a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 2. O armário de João possui 4 gavetas: uma de meias M, outra de calças C, outra de bermudas B e uma última de sapatos S. Neste armário, João guarda duas meias M_1 e M_2, três calças C_1, C_2 e C_3, quatro bermudas B_1, B_2, B_3 e B_4, e dois sapatos S_1 e S_2. Seja a função $f : R \to G$, onde $R = \{M_1, M_2, C_1, C_2, C_3, B_1, B_2, B_3, B_4, S_1, S_2\}$ e $G = \{M, C, B\}$, podemos afirmar que f é:

a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 3. Seja a função f:

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\to \{2, 4, 6\} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que f é:

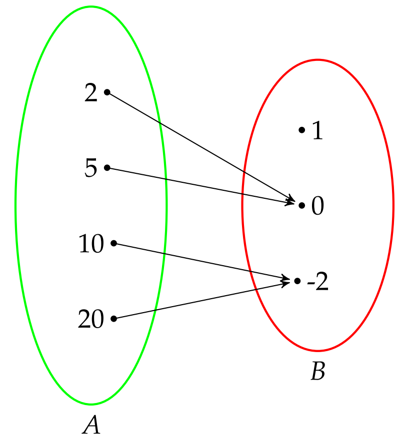
a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 4. Sobre a função $f : A \to B$, cuja relação está representada na figura, podemos afirmar que f é:



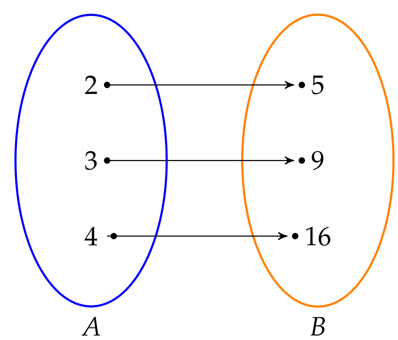
a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 5. Sobre a função $f : A \to B$, cuja relação está representada na figura, podemos afirmar que f é:



a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 6. Na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = x^2$, calcule $f(1)$ e $f(-1)$ para justificar o fato de que f NÃO é injetiva.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Seja a função $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x-3}$. A função f é sobrejetiva?

Exercício 8. Seja a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Calcule $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $f(2)$. A função f é injetiva?

Exercício 9. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$. Resolva as equações $f(x) = 1$ e $f(x) = -1$, concluindo que f não é injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 10. Construa o gráfico e classifique em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Exercício 11. Seja a função $f : [-1, +\infty] \to B$, definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Determine B para que f admita inversa.

Exercício 12. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Verifique se f é sobrejetiva, injetiva ou bijetiva.

Exercício 13. Seja a função $f : [1,4] \to [1,k]$, definida por $f(x) = 2x - 1$. Determine o valor de k para que f seja sobrejetiva.

Exercício 14. Determine p, para que a função $f : \mathbb{R} \to [p, +\infty]$, definida por $f(x) = x^2 - 2$, seja injetora.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Considere a função bijetora $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a + b$ é:

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 8.

e) 10.

Exercício 16. Sabendo que "c" e "d" são números reais, o maior valor de "d" tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + c, & \text{para } x \geq d \\ x^2 - 4x + 3, & \text{para } x < d, \end{cases} \text{ seja injetora é:}$$

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 17. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais está definida a função $f(x) : \dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

a) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b) $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

c) $(-\infty, 2) \cup (-2, 1) \cup [5, +\infty)$.

d) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

e) $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$.

Exercício 18. Considere as funções reais f e g, tais que $f(x) = \sqrt{x} + 4$ e $f(g(x)) = x^2 - 5$, onde $g(x)$ é não negativa para todo x real. Assinale a alternativa cujo conjunto contém todos os possíveis valores de x, que satisfazem os dados do enunciado.

a) $\mathbb{R} -]-3, 3[$.

b) $\mathbb{R} -]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

c) $]\sqrt{5}, \sqrt{5}[$.

d) $]-3, 3[$.

e) $\mathbb{R} -]-\infty, 3[$.

Exercício 19. Sejam f e g funções de D em D. Mostre que se f e g são injetivas, então a função $f \circ g$ é injetiva.

Exercício 20. Sejam f e g funções de D em D. Mostre que se f e g são sobrejetivas, então a função $g \circ f$ é sobrejetiva.

Exercício 21. Determine uma função f de modo que $g(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f, sedo g dada por $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

Exercício 22. Seja n um inteiro positivo ímpar e sejam $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ números reais distintos. Encontre todas as funções bijetivas

$$f : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

tais que

$$|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \ldots = |f(x_n) - x_n|.$$

Respostas e Soluções.

1. A.

2. B.

3. C.

4. D.

5. C.

6. $f(1) = f(-1) = 1$, ou seja, $\exists x_1 \neq x_2$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, portanto f não é injetiva.

7. (Extraído da Vídeo Aula) Fazendo $y = \dfrac{3x+5}{4x-3}$, temos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+5}{4x-3} \\ 4xy - 3y &= 3x+5 \\ 4xy - 3x - 3y - 5 &= 0 \\ (4y-3)x - (3y+5) &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $4y - 3 = 0$ e $3y + 5 \neq 0$, chegamos a $y = \dfrac{3}{4}$ e $y \neq -\dfrac{5}{3}$, donde:

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{4x-3} &= \frac{3}{4} \\ 12x + 20 &= 12x - 9 \\ 20 &= -9. \end{aligned}$$

Como chegamos em um absurdo, significa que para $y = f(x) = \dfrac{3}{4}$, $\nexists x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$, ou seja, f não é sobrejetiva.

8. (Extraído da Vídeo Aula) Calculando $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $f(2)$, temos:

(a) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{4} + 4 = \dfrac{17}{4}$;

(b) $f(2) = 2^2 + \dfrac{1}{2^2} = 4 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{4}$.

Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2)$, então f não é injetora.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Para $f(x) = 1$, temos:

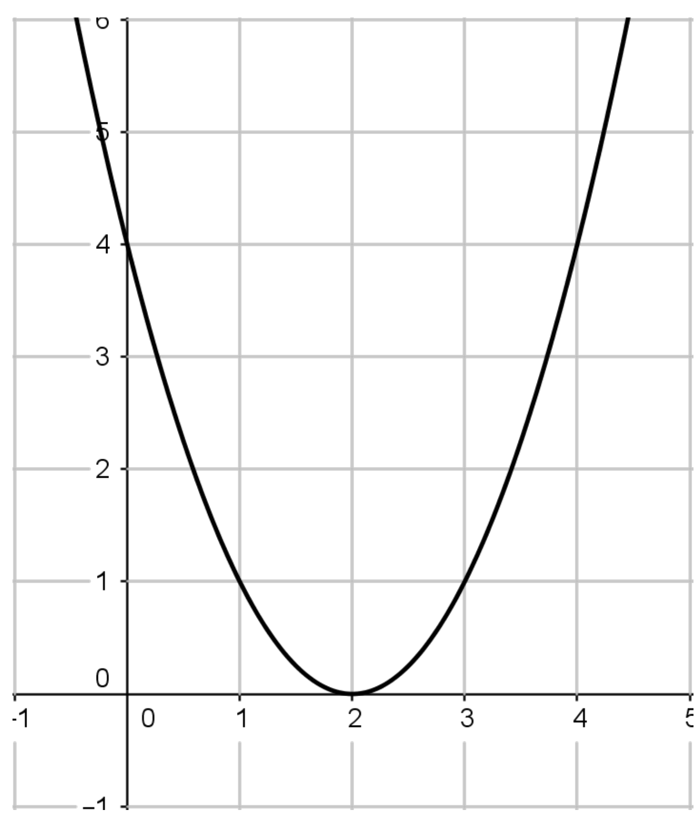
$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x^2+1} &= 1 \\ 2x - 3 &= x^2 + 1 \\ -x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= -3 \\ (x-1)^2 &= -3. \end{aligned}$$

Isso significa que, para $f(x) = 1$, $\nexists x \in \mathbb{R}$, portanto f não é sobrejetiva.
Fazendo agora $f(x) = -1$, temos:

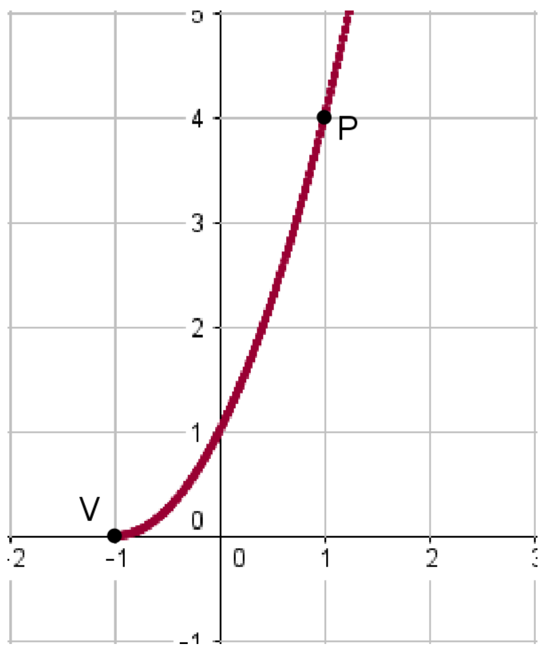
$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x^2+1} &= -1 \\ 2x - 3 &= -x^2 - 1 \\ x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 3 \\ (x+1)^2 &= 3 \\ x &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Assim, se para $f(x) = -1$ temos $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ e $x_2 = -1 - \sqrt{3}$, então f não é injetiva.
Portanto, f não é injetiva nem sobrejetiva.

10. Como $\exists x_1 \neq x_2$, sendo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, então f não é injetiva, por exemplo $f(0) = f(4) = 4$. Analisando o gráfico, vemos que $Im = CD = \mathbb{R}_+$, ou seja, f é sobrejetiva.



11. Fazendo um esboço do gráfico da função, temos:



Perceba que, por conta do domínio, o gráfico é apenas uma parte de uma parábola (o conjunto de pontos cujo valor de x é maior ou igual a -1). Perceba também que o vértice da parábola é o ponto $(-1, 0)$, que coincide com o ”início”do gráfico, o que garante que $\forall x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, f é injetiva. Para que f seja sobrejetiva, devemos ter $Im = CD$, ou seja, $B = R_+$. Dessa forma f é bijetiva e, por consequência, admite inversa.

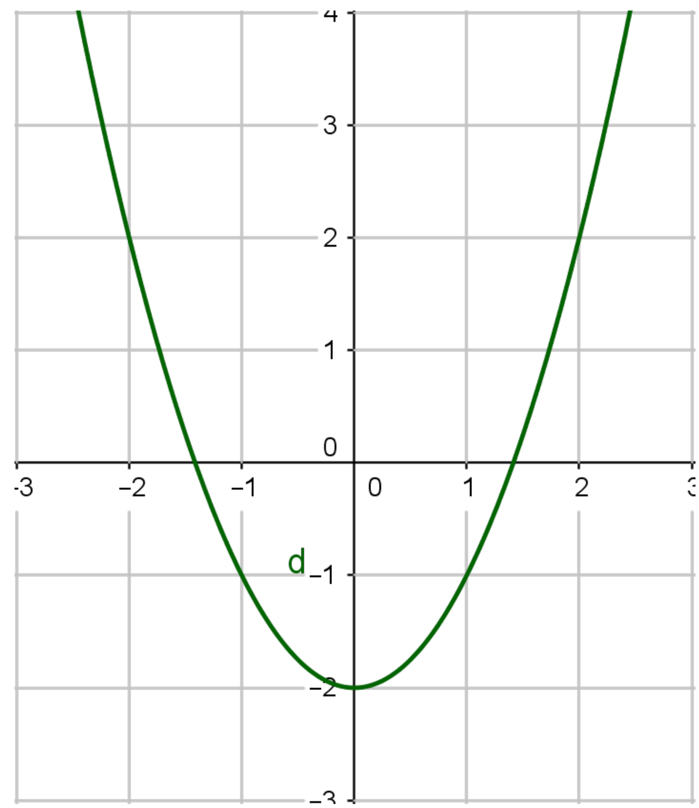
12. (Extraído da Vídeo Aula) Para a primeira parte da equação, temos $y = \dfrac{x}{2}$, que implica em $x = 2y$; e para a segunda parte, temos $y = \dfrac{x+1}{2}$, que implica em $x = 2y - 1$. Assim, $f(2y) = f(2y - 1) = y$, ou seja, f é sobrejetiva. Pela relação encontrada, vemos que $y = f(2y)$ e também $y = f(2y - 1)$, ou seja, f não é injetiva e, por consequência, não é bijetiva.

13. Se $y = 2x - 1$, então $x = \dfrac{y+1}{2}$. Como $D = [1, 4]$ e o gráfico de f é um segmento de reta, temos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & x & \leq & 4 \\ 1 & \leq & \dfrac{y+1}{2} & \leq & 4 \\ 2 & \leq & y+1 & \leq & 8 \\ 1 & \leq & y & \leq & 7. \end{array}$$

Portanto, $Im = [1, 7]$. Como f é sobrejetiva, então $CD = Im$, ou seja, $k = 7$.

14. Analisando o gráfico de f, para $CD = \mathbb{R}$, vemos que trata-se de uma parábola cujo vértice é o ponto $(0, -2)$. Assim, para que f seja injetora, nas condições do problema, devemos ter $p \geq 0$.



15. (Extraído da EsPCEx - 2015) A interseção de uma função com a sua inversa ocorre sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, sobre a reta $y = x$. Assim,

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 2 &= x \\ -x^2 + x + 2 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Como $D = [1, +\infty)$, $x = 2$ e, consequentemente, o ponto de interseção é $(2, 2)$. Portanto $a + b = 4$. Resposta B.

16. (Extraído da EsPCEx - 2015) A parte do gráfico onde $x < d$ é uma parábola, cujo vértice é o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = (2, -1)$. Assim, a função é injetora, nas condições do problema, para $x \leq 2$, portanto, o maior valor de d é 2. Resposta D.

17. (Extraído da EsPCEx - 2015) Analisando o denominador, temos $x^2 - 4 \neq 0$, segue que $x \neq \pm 2$. Agora, analisando o numerador, temos $x^2 - 6x + 5 \geq 0$, segue que $x \leq 1$ ou $x \geq 5$. Fazendo a interseção dos resultados encontrados, chegamos a $S = (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$. Resposta C.

18. (Extraído da EsPCEx - 2016) Temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} + 4 \\ f(g(x)) &= \sqrt{g(x)} + 4 \\ x^2 - 5 &= \sqrt{g(x)} + 4 \\ x^2 - 9 &= \sqrt{g(x)}. \end{aligned}$$

Como $g(x)$ é não negativa para todo x real, temos $x^2 - 9 \geq 0$, segue que $x \leq -3$ ou $x \geq 3$. Resposta A.

19. (Extraído da Vídeo Aula) Sejam x_1, $x_2 \in D$, tais que $x_1 \neq x_2$. Como g é injetiva, temos que $g(x_1) \neq g(x_2)$. Como f é injetiva e $g(x_1) \neq g(x_2)$, temos que $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$. Logo $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$. Portanto $f \circ g$ é injetiva.

20. (Extraído da Vídeo Aula) Como g é sobrejetiva, para todo $z \in D$ existe $y \in D$ tal que $g(y) = z$. Como f é sobrejetiva, para todo $y \in D$ existe $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Para todo $z \in D$ existe $x \in D$ tal que $z = g(y) = g(f(x)) \Rightarrow g \circ f$ é sobrejetiva.

21.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \Leftrightarrow \\ 2 + \frac{3}{f(x)+1} &= x \Leftrightarrow \\ \frac{3}{f(x)+1} &= x - 2 \Leftrightarrow \\ f(x) + 1 &= \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \\ f(x) &= \frac{3}{x-2} - 1 \Leftrightarrow \\ f(x) &= \frac{5-x}{x-2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

A segunda linha mostra que é necessário termos $f(x) + 1 \neq 0$ e isso de fato ocorre com a função $f(x) = \dfrac{5-x}{x-2}$.

22. Seja $k = |f(x_i) - x_i|$. Daí,

$$\begin{aligned} f(x_1) - x_1 &= \pm k \\ f(x_2) - x_2 &= \pm k \\ f(x_3) - x_3 &= \pm k \\ &\dots \\ f(x_n) - x_n &= \pm k \end{aligned}$$

Como f é uma bijeção, $\{f(1), f(2), \dots, f(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$ e a soma de todos os membros dos lados esquerdos das equações anteriores é 0. Se $k \neq 0$, analisando o lado direito, a quantidade de vezes em que aparece $+k$ tem que ser igual a quantidade de vezes em que aparece $-k$. Como n é ímpar, isso é impossível. Portanto, $k = 0$ e a função é a identidade, ou seja, $f(x) = x$ para todo x. Só existe uma função satisfazendo a condição dada.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com