Módulo Função Quadrática

Noções Básicas

9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Função Quadrática
Noções Básicas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Os coeficientes de x^2 (a), de x (b) e o termo independente (c) da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 2$, são, respectivamente:

a) -1, -2 e 4.

b) -2, -4 e 2.

c) -1, -1 e 1.

d) -1, 4 e -2.

e) -2, 4 e 2.

Exercício 2. Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 + 5x - 3$, determine:

a) $f(1)$.

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $f(\sqrt{2})$.

Exercício 3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem como soma das raízes:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 4. Qual a coordenada x do vértice da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 - 8x + 5$?

a) -4.

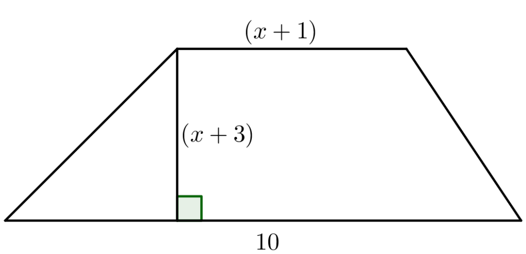
b) -5.

c) 0.

d) 5.

e) 4.

Exercício 5. Na figura, temos um trapézio no qual a altura e uma das bases são valores em função de x. A área desse trapézio pode ser representada por uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Determine:

a) Os valores de a, b e c, desta função.

b) Qual a área do trapézio para $x = 3$.

Exercício 6. Em um campeonato de futebol com x times, cada time jogará com todos os outros duas vezes. Determine:

a) Uma lei de associação que represente o número de jogos f em função de x.

b) O número de jogos para $x = 20$.

Exercício 7. Determine as raízes das seguintes funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 4$.

b) $f(x) = x^2 + 3x$.

c) $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Exercício 8. Para que valor de x, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 1$, atinge seu valor máximo?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Utilize uma função quadrática para relacionar o número de diagonais f de um polígono e o número x de lados.

Exercício 10. João, em uma viagem percorreu $200km$ em um certo tempo. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de $10km/h$ a mais. Qual a velocidade do trem?

Exercício 11. Mário possui 18 anos e Augusto 15. Daqui a quantos anos o produto de suas idades será igual a 378?

Exercício 12. A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma trajetória parabólica. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, determine:

a) O instante no qual a bola atinge a altura máxima.

b) Essa altura máxima.

Exercício 13. Uma empresa de excursão disponibilizou uma viagem para 100 pessoas de um grupo, ao preço de $R\$200,00$ por pessoa, se todos aderissem à viagem, mas para cada pessoa que desistisse seria acrescido $R\$4,00$ para cada um que fosse.

a) Expresse o valor f arrecadado pela empresa em função da quantidade x de pessoas que aderiram.

b) Determine o valor máximo que a empresa pode arrecadar.

Exercício 14. Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei $h(t) = 20t - 5t^2$. Determine:

a) A altura em que a bola se encontra $1s$ após o lançamento.

b) Depois de quanto tempo a bola estará a $8,75m$ do solo.

c) A altura máxima que a bola atinge.

Exercício 15. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39^o. Qual o tempo mínimo de espera após se desligar o forno para que a porta possa ser aberta?

Exercício 16. A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reias e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal de produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Qual é o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo?

Exercício 18. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no:

a) 19^o dia.

b) 20^o dia.

c) 29^o dia.

d) 30^o dia.

e) 60^o dia.

Exercício 19. Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18.

b) 20.

c) 36.

d) 45.

e) 54.

Exercício 20. Mostre que se dois números positivos têm soma constante, então seu produto é máximo quando eles são iguais.

Respostas e Soluções.

1. D.

2.

a) $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 5$.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1}{4}$.

c) $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 + 5\sqrt{2} - 3 = 6 + 5\sqrt{2} - 3 = 3 + 5\sqrt{2}$.

3. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$. Resposta E.

4. $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(-1)} = -4$. Resposta A.

5.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(10 + x + 1)(x + 3)}{2} \\ &= (x + 11)(x + 3) \\ &= x^2 + 3x + 11x + 33 \\ &= x^2 + 14x + 33. \end{aligned}$$

Portanto, $a = 1$, $b = 14$ e $c = 33$.

b) $f(3) = 3^2 + 14 \cdot 3 + 33 = 84$.

6.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x + 1) \\ &= x^2 + x. \end{aligned}$$

.

b) $f(20) = 20^2 + 20 = 420$.

7.

a)

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = 0$ ou $x + 3 = 0$, segue que $x_1 = 0$ e $x_2 = -3$.

c)

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$.

8. O valor de máximo de uma função quadrática, cujo gráfico possui concavidade para baixo, ocorre no vértice. Sendo assim, temos $x_v = -\frac{6}{2(-1)} = 3$.

9. Sabendo que: de cada vértice partem $(x - 3)$ diagonais, já que os segmentos que ligam este vértice aos seus vizinhos são lados e não existe diagonal ligando um vértice a ele mesmo; que o total de vértices é x, pois é mesma quantidade do número de lados; e que fazendo o produto desses dois valores contaremos todas as diagonais duas vezes, já que cada diagonal liga dois vértices, temos $f(x) = \frac{x(x+3)}{2}$, segue que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Supondo que a velocidade do trem seja v e os $200km$ foram percorridos em t horas, então $v = \frac{200}{t}$, segue que $vt = 200$. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, seu tempo seria $(t - 1)$ e sua velocidade, $(v + 10)$, ou seja:

$$\begin{aligned} v + 10 &= \frac{200}{t - 1} \\ (v + 10)(t - 1) &= 200 \\ vt - v + 10t - 10 &= 200 \\ 200 - v + 10t - 10 &= 200 \\ 10t - v - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por t, temos:

$$\begin{aligned} 10t^2 - vt - 10t &= 0 \\ 10t^2 - 10t - 200 &= 0 \\ t^2 - t - 20 &= 0 \\ t &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 9}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $t = 5h$ e, consequentemente, $v = \frac{200}{5} = 40km/h$.

11. Daqui a x anos, o produto das idades será $(18 + x)(15 +$

x). Temos, então:

$$\begin{aligned}(18+x)(15+x) &= 378\\ 270+18x+15x+x^2 &= 378\\ x^2+33x-108 &= 0\\ x &= \frac{-33\pm\sqrt{1089+432}}{2}\\ &= \frac{-33\pm 39}{2}\end{aligned}$$

Como só nos interessa o valor positivo de x, temos que o produto das idades de Mário e Augusto será 378 daqui a $\dfrac{-33+39}{2} = 3$ anos.

12.

a) A bola atinge a altura máxima no vértice da parábola que representa a função h, ou seja, $t_v = -\dfrac{6}{2(-1)} = 3$ segundos após o chute.

b) $h_{max} = -3^2 + 6\cdot 3 = 9m$.

13.

a) Cada uma das x pessoas que aderirem deve pagar 200 reais mais 4 reais por pessoa que não viajarão, ou seja, $4(100-x)$. Portanto, o total f arrecadado pela empresa é $f(x) = x(200+4(100-x)) = x(600-4x) = -4x^2 + 600x$.

b) Como se trata de uma função quadrática, o valor máximo arrecadado é a coordenada y do vértice da parábola, ou seja, $f_{max} = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = -\dfrac{360000-4\cdot(-4)\cdot 0}{4\cdot(-4)} =$ 22.500 reais.

]

14.

a) $h(1) = 20\cdot 1 - 5\cdot 1^2 = 15m$.

b)

$$\begin{aligned}-5t^2+20t &= 8,75\\ -5t^2+20t-8,75 &= 0\\ -20t^2+80t-35 &= 0\\ -4t^2+16t-7 &= 0\\ t &= \frac{-16\pm\sqrt{256-112}}{-8}\\ &= \frac{-16\pm 12}{-8}\\ &= \frac{4\pm 3}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, a bola estará a $8,75m$ do solo em dois momentos: $0,5$ e $3,5$ segundos após o lançamento.

c) A altura máxima é a coordenada y do vértice da parábola, ou seja:

$$\begin{aligned}h_{max} &= -\frac{b^2-4ac}{4a}\\ &= -\frac{400-4\cdot(-5)\cdot 0}{4\cdot(-5)}\\ &= -\frac{400}{-20}\\ &= 20.\end{aligned}$$

Portanto, a altura máxima que a bola atinge é $20m$.

15. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}-\frac{t^2}{4}+400 &= 39\\ \frac{t^2}{4} &= 361\\ t^2 &= 4\cdot 361\\ t &= \pm\sqrt{4\cdot 361}\\ &= \pm 38.\end{aligned}$$

Portanto, o tempo mínimo de espera é de 38 minutos, após o desligamento do forno, para abertura da porta.

16. (Extraído da Vídeo Aula) Supondo que o aumento da passagem seja x, temos que o total arrecadado f pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}f(x) &= (2400-20x)(20+x)\\ &= 48000+2400x-400x-20x^2\\ &= -20x^2+2000x+48000.\end{aligned}$$

Como queremos o preço da passagem para faturamento máximo, temos $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2000}{-40} = 50$, ou seja, a passagem deverá custar $20+50 = 70$ reais.

17. (Extraído da Vídeo Aula) Obtemos o lucro L, fazendo $V-C$, ou seja, $L(x) = -2x^2+28x+40$. Como queremos o número de lotes para lucro máximo, temos $x_v = -\dfrac{-28}{2\cdot(-2)} = 7$. Portanto, devem ser vendidos 7 lotes.

18. (Extraído do ENEM - 2016) Temos:

$$\begin{aligned}-2t^2+120t &= 1600\\ t^2-60t+800 &= 0\\ t &= \frac{60\pm\sqrt{3600-3200}}{2}\\ &= \frac{60\pm 20}{2}\\ &= 30\pm 10.\end{aligned}$$

Temos dois valores, 20 e 40. Porém, como a segunda dedetização deve ocorrer quando a quantidade chegar a 1600, deve ocorrer logo no 20^o dia. Resposta B.

19. (Extraído do ENEM - 2016) Fazendo $9 - x^2 = 0$, encontramos $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, segue que a largura do túnel é $3 - (-3) = 6m$. A altura do túnel é a medida da ordenada do vértice, ou seja, $y_v = -\dfrac{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}{4 \cdot (-1)} = 9m$. Assim, a área da parte frontal da tampa de concreto é $\dfrac{2}{3} \cdot (6 \cdot 9) = 36m^2$. Resposta C.

20. (Extraído da Vídeo Aula) Sejam dois números positivos x e y e sua soma constante $k = x + y$, donde $y = k - x$. Seu produto é $P = xy = x(k - x) = -x^2 + kx$, cujo valor máximo ocorre em $x_v = -\dfrac{k}{-2} = \dfrac{k}{2}$ e, sendo assim, $y = \dfrac{k}{2}$, ou seja, quando $x = y$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com