Material Teórico - Módulo Função Quadrática

Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau

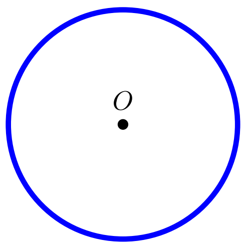
Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 A parábola

Enquanto o gráfico de uma função de primeiro grau é uma reta, o gráfico de uma função quadrática é uma *parábola*. Antes de continuarmos, vejamos precisamente o que é uma parábola.

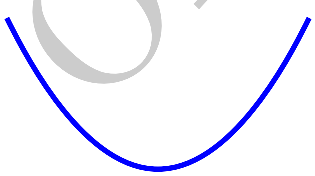
Assim como outras formas geométricas como retas, círculos e elipses, as parábolas são conjuntos de pontos de um plano, dispostos de uma maneira bastante específica. Por exemplo, para construir um círculo (em um plano fixado) precisamos escolher dois parâmetros: o centro O e o raio r; com isso, podemos definir o círculo de centro O e raio r como o conjunto dos pontos (do plano) cuja distância até O é igual a r (veja a figura abaixo).



Por outro lado, para construir uma parábola, no lugar de escolher um centro e um raio, precisaremos escolher outros parâmetros: uma reta d, que chamaremos de *diretriz*, e um ponto F, que chamaremos de *foco*.

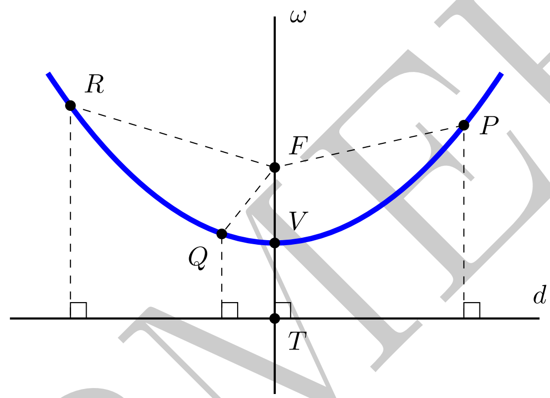
A **parábola** de **foco** F e **diretriz** d é o conjunto dos pontos do plano que contém d e F, tais que sua distância para F é igual a sua distância para d.

A figura abaixo mostra o icônico formato de um arco de uma parábola. Veja que ele *não* se parece muito com um arco de círculo (mesmo se colarmos várias cópias de pedaços dele, não formaremos um círculo). A parábola possui comprimento infinito, por isso o que desenhamos aqui é apenas um pedaço (arco) dela. A vídeo-aula deste módulo possui uma animação exibindo como a parábola é gerada à partir de F e d, e como ela muda ao variarmos as posições de d e F.



Na figura seguinte temos uma parábola com vários outros elementos destacados, entre eles: seu foco F e sua diretriz d. Marcamos também alguns pontos, P, Q, R e V pertencentes à parábola, juntamente com os segmentos que determinam a distância de cada um deles para F e para a diretriz. Veja que, para cada ponto, os dois segmentos que partem dele possuem o mesmo comprimento, mas este comprimento pode ser diferente de um ponto para outro.

Temos, ainda, o **eixo** (**de simetria**) ω (aqui representado pela letra grega *ômega*), que é a reta perpendicular a d e que passa por F. Veja que ω funciona como um "espelho" para os pontos da parábola.



Por fim, veja que o ponto V na figura é bastante especial; ele é o ponto de interseção do eixo de simetria ω com a parábola, e é chamado de **vértice da parábola**. Como V pertence à parábola, também vale que a distância entre V e F é igual à distância entre V e a diretriz. Dessa forma, se chamarmos de T o ponto de interseção entre ω e d, temos que V será o ponto médio do segmento FT.

É importante observar que, conhecendo apenas o foco e o vértice, já podemos desenhar a parábola. Realmente, a partir destes elementos podemos facilmente encontrar o eixo e a diretriz: o eixo é a reta que passa por F e V, e a diretriz é a reta perpendicular ao eixo e passando pelo ponto T a ele pertencente, tal que $\overline{TV} = \overline{VF}$.

Aplicações práticas para a parábola são encontradas em diversas áreas da Física e da Engenharia, como no projeto de antenas parabólicas, radares e faróis de automóveis. Basicamente, isso se deve ao fato de que todo *espelho parabólico* concentra em seu foco um feixe de raios de luz (ou outras ondas eletromagnéticas) paralelos a seu eixo, mas isso é assunto para outra estória. Outro exemplo relevante é a trajetória descrita por uma bala de canhão ao ser lançada, de acordo com sua direção e velocidade iniciais, considerando o efeito da força de gravidade mas desprezando os efeitos da resistência do ar e da curvatura da Terra.

1.1 O gráfico de uma função quadrática é uma parábola

Nesta subseção, vamos demonstrar porque o gráfico de uma função quadrática é, de fato, uma parábola. Além disso, calcularemos as coordenadas do foco e do vértice em termos dos coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Considere, inicialmente, o caso em que $b = c = 0$, ou seja, $f(x) = ax^2$. Vamos assumir que $a > 0$, já que o caso $a < 0$ é análogo. Queremos mostrar que existe um ponto F e uma reta d tais que todo ponto do gráfico de f, ou seja, todo ponto da forma (x, ax^2), é equidistante de F e d. (Lembre-se de que ser equidistante significa possuir a mesma distância).

A fim de encontrar tais F e d, comece observando que, como $x^2 = (-x)^2$ para todo x real, temos que $f(x) = f(-x)$ e, portanto, o eixo-y funciona como um eixo de simetria para os pontos do gráfico de f (de fato, o ponto $(-x, ax^2)$ é o simétrico de (x, ax^2) em relação ao eixo-y). Sendo assim, o foco (caso exista) precisa estar sobre o eixo-y; logo, F deve possuir coordenadas $(0, p)$, para algum número real p (que precisamos determinar). Como $(0, 0)$ é o único ponto do gráfico que está sobre o eixo de simetria, ele é nosso único candidato para ser o vértice V de nossa parábola. Por fim, lembrando que a diretriz é perpendicular ao eixo de simetria, aqui ela precisa ser uma reta paralela ao eixo-y. E, como a distância da diretriz para $V = (0, 0)$ é igual à distância de V a F, temos que a diretriz só pode ser a reta $y = -p$.

Considere, agora, um ponto qualquer do gráfico de f, digamos $Q = (x, ax^2)$, e vamos calcular a distância dele até F e até a diretriz. A figura abaixo mostra o que temos até o presente momento.

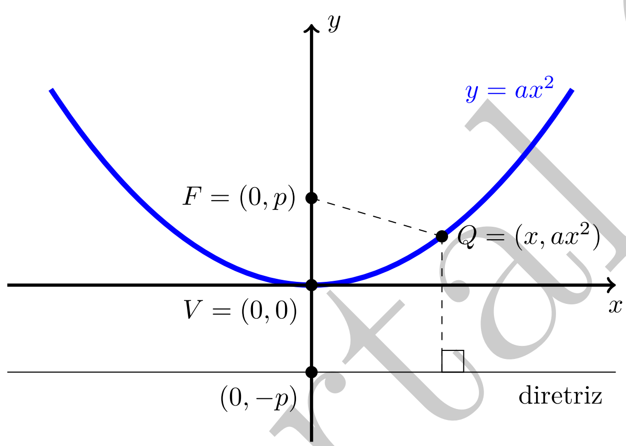


Figura 1: gráfico de $y = ax^2$.

Uma aplicação simples do Teorema de Pitágoras garante que a distância entre os pontos Q e F é igual a

$$\sqrt{(x-0)^2 + (ax^2 - p)^2}. \tag{1}$$

Por outro lado, pela Figura 1, a distância entre o ponto Q e a diretriz é igual à soma da distância entre Q e o eixo-x com a distância entre o eixo-x e a diretriz. O resultado desta soma é, claramente,

$$ax^2 + p. \tag{2}$$

Queremos encontrar p tal que as expressões (1) e (2) sejam iguais para todo x real. Como a expressão dentro da raiz em (1) é não-negativa, temos que (1) e (2) são iguais se, e somente se, seus quadrados forem iguais:

$$x^2 + (ax^2 - p)^2 = (ax^2 + p)^2.$$

Então, devemos ter

$$\begin{aligned} x^2 &= (ax^2 + p)^2 - (ax^2 - p)^2 \\ &= \big((ax^2 + p) + (ax^2 - p)\big)\big((ax^2 + p) - (ax^2 - p)\big) \\ &= (2ax^2)(2p) \\ &= 4apx^2, \end{aligned}$$

de sorte que a única escolha possível é $4ap = 1$, isto é, $p = \dfrac{1}{4a}$. Concluímos, portanto, o que segue (observe que, no quadro a seguir, consideramos simultaneamente os casos $a > 0$ e $a < 0$):

> O gráfico de $f(x) = ax^2$, onde $a \neq 0$, é uma parábola cujo *foco* é o ponto
>
> $$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$$
>
> e cujo *vértice* é o ponto
>
> $$V = (0, 0).$$
>
> Ademais, sua *diretriz* é a reta que possui equação $y = -\frac{1}{4a}$.

Consideremos, agora, o caso geral em que a função quadrática é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Denotando $f(x)$ por y e escrevendo a equação acima em sua forma canônica (veja a aula anterior), obtemos

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{3}$$

Por fim, fazendo a mudança de variáveis

$$X = x + \frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad Y = y + \frac{\Delta}{4a},$$

obtemos $Y = aX^2$.

Já provamos que o conjunto dos pontos (X, Y) que satisfazem $Y = aX^2$ é uma parábola. Por outro lado, observe que sob nossa mudança de variáveis o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem (3) é apenas uma traslação desse conjunto de pontos (X, Y). Mais precisamente, o ponto (x, y) é obtido transladando o ponto (X, Y) de $\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda (pois $x = X - \frac{b}{2a}$) e de $\frac{\Delta}{4a}$ unidades para baixo (pois $y = Y - \frac{\Delta}{4a}$). Concluímos, daí, o seguinte:

O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, é uma parábola cujo *foco* é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

e cujo *vértice* é o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Ademais, sua *diretriz* é a reta que possui equação $y = \frac{-1-\Delta}{4a}$.

Denotaremos sistematicamente as coordenadas do vértice do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ por (x_v, y_v). Dessa forma, acabamos de demonstrar que

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

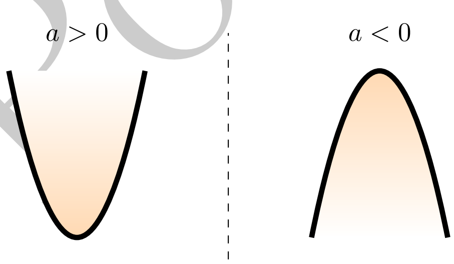
Recorde agora que, na aula passada, mostramos que se $a < 0$ (resp. $a > 0$) a função quadrática sempre atinge seu valor máximo (resp. seu valor mínimo) quado $x = -\frac{b}{2a}$. Isso quer dizer que o máximo (resp. mínimo) é atingido justamente no vértice da parábola.

2 Variando o coeficiente de x^2

Nesta seção, vamos examinar o que acontece com o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ao variarmos o valor de a (evidentemente, mantendo-o não nulo).

2.1 Concavidade

Como antes, suponha primeiro que $f(x) = ax^2$. Neste caso, lembre-se de que o vértice é o ponto $(0, 0)$. Por outro lado, como o foco tem coordenadas $F = (0, 1/(4a))$, temos que ele está acima do vértice quando $a > 0$, e abaixo do vértice quando $a < 0$ (até agora todas nossas figuras mostraram parábolas em que $a > 0$). Isso determina a direção da "boca" da parábola, pois o foco sempre se encontra "dentro" da parábola (veja a figura seguinte).



No caso geral, em que $f(x) = ax^2 + bx + c$, já vimos que temos apenas uma translação das figuras acima. Dessa forma, a direção da "boca da parábola" é determinada apenas pelo sinal de a, não importando os valores de b e c. Os matemáticos chamam essa "boca" de **concavidade**.

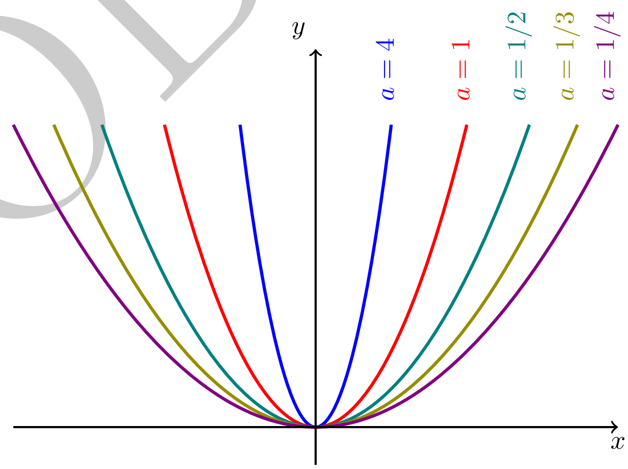
Quando $\boldsymbol{a > 0}$, dizemos que a parábola possui *concavidade voltada para cima*. Neste caso, o valor *mínimo* de $f(x)$ é atingido no vértice.

Quando $\boldsymbol{a < 0}$, dizemos que a parábola possui *concavidade voltada para baixo*. Neste caso, o valor *máximo* de $f(x)$ é atingido no vértice.

2.2 Abertura

O valor absoluto do coeficiente de x^2 está ligado à *abertura da boca* da parábola. De forma precisa, quanto maior for o valor de $|a|$, menor será tal abertura: a parábola será mais *fechada*, pois irá crescer mais rapidamente, ou seja, de forma mais acentuada/inclinada.

Exemplo 1. *A figura abaixo mostra os gráficos de funções do tipo $y = ax^2$, para diferentes valores de a.*



3 Esboço do gráfico

A maneira mais prática de esboçar o gráfico de uma função de segundo grau é marcando no plano alguns de seus pontos-chave. Como sempre, suponha $f(x) = ax^2 + bx + c$. Seguimos os passos abaixo:

1. Marque, se houver, as interseções do gráfico com o eixo-x. Estes pontos são aqueles em que $y = f(x) = 0$; assim, basta encontrar as raízes, digamos r_1 e r_2, da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Porém, quando $\Delta < 0$ tal equação não possui raízes reais, e isso implica que a parábola não intersecta o eixo-x. Quando $\Delta = 0$, temos $r_1 = r_2$ e a parábola tangencia o eixo-x. Quando $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo-x em dois pontos distintos: $(r_1, 0)$ e $(r_2, 0)$. Veja a Figura 2.

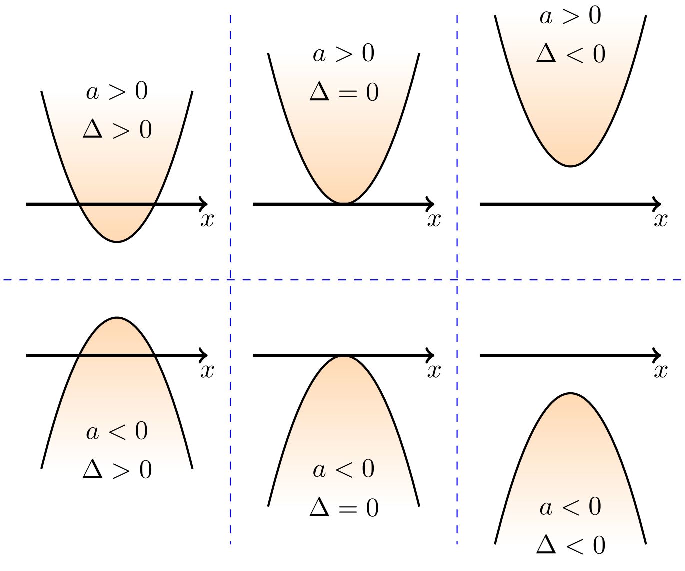


Figura 2: interseções com o eixo-x e concavidade, de acordo com os sinais de a e Δ.

2. Marque a interseção da parábola com o eixo-y. Este é o ponto em que $x = 0$. Como $f(0) = c$, temos então que o ponto é $(0, c)$.

3. Marque o vértice. Como vimos, ele possui coordenadas $(x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$. Como já conhecemos as raízes, é interessante observar que também vale que $x_v = (r_1 + r_2)/2$, já que provamos na aula anterior que $r_1 + r_2 = -b/a$.

4. (Opcional) Se necessário, escolha mais alguns valores arbitrários para x e marque outros pontos $(x, f(x))$, para facilitar a visualização. Isso costuma ser necessário quando $\Delta \leq 0$, pois neste caso poucos pontos terão sido marcados até o momento. Marque, ainda, os simétricos dos pontos já marcados em relação ao eixo de simetria.

5. Observando a direção da concavidade (de acordo com o sinal de a), desenhe a parábola passando pelos pontos marcados.

3.1 Alternativa

No caso em que já conhecemos a forma canônica da função quadrática, pode ser mais simples esboçar seu gráfico fazendo apenas uma translação do gráfico de $f(x) = ax^2$. Por exemplo, suponha que a função é dada no formato (cuidado com os sinais de k e m):

$$f(x) = a(x - k)^2 + m.$$

Veja que, neste caso, $x_v = k$ e $y_v = m$. Basta, então, desenhar a parábola $y = ax^2$ e, em seguida, fazer a translação que leva o vértice desta última parábola ao ponto (k, m). Observe que:

1. Quando $k > 0$, a parábola $y = ax^2$ é transladada em k unidades para a direita.

2. Quando $k < 0$, a parábola $y = ax^2$ é transladada em k unidades para a esquerda.

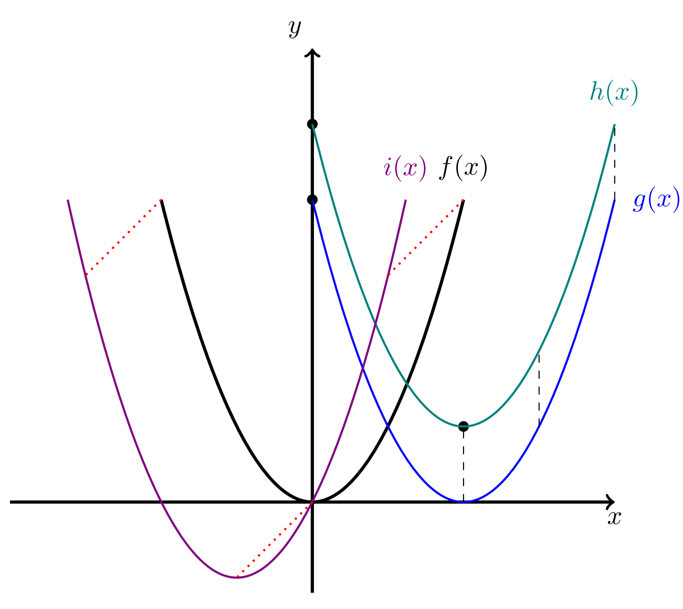
3. Quando $m > 0$, a parábola $y = ax^2$ é transladada em m unidades para cima.

4. Quando $m < 0$, a parábola $y = ax^2$ é transladada em m unidades para baixo.

Exemplo 2. *Desenhe os gráficos das seguintes funções quadráticas:*

- $f(x) = x^2$.
- $g(x) = (x - 2)^2$.
- $h(x) = (x - 2)^2 + 1$.
- $i(x) = (x + 1)^2 - 1$.

Solução. Veja que, em todas estas funções, temos $a = 1$. Em particular, todas possuem concavidade para cima. Partindo da parábola $y = f(x) = x^2$, podemos obter o gráfico de $g(x)$ fazendo uma translação de 2 unidades para a direita. Em seguida, $h(x)$ pode ser obtida transladando $g(x)$ em 1 unidade para cima. Por sua vez, $i(x)$ é obtida de $f(x)$ transladando-a uma unidade para a esquerda e uma unidade para baixo.

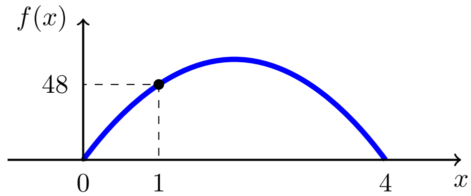


□

Observação 3. *No exemplo anterior, os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ nunca irão intersectar. Apesar da "ilusão de ótica", os três segmentos pontilhados verticais possuem comprimento igual a 1. Por sua vez, os três segmentos pontilhados oblíquos possuem comprimento $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.*

Terminamos esta seção discutindo alguns exemplos envolvendo gráficos de funções de segundo grau.

Exemplo 4. *Um corpo arremessado tem sua trajetória representada pelo gráfico da função quadrática esboçado na figura a seguir. Qual é a altura máxima atingida por esse corpo?*



Solução. Os zeros da função são $r_1 = 0$ e $r_2 = 4$. Usando a forma fatorada que estudamos no módulo sobre equações do segundo grau, segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-r_1)(x-r_2) \\ &= a(x-0)(x-4) \\ &= ax(x-4). \end{aligned}$$

Como $f(1) = 48$, temos que $a \cdot 1 \cdot (1-4) = 48$, de sorte que $-3a = 48$ e, portanto $a = -16$. Logo,

$$f(x) = -16x(x-4).$$

O valor máximo de $f(x)$ é atingido no vértice (x_v, y_v). Temos que $x_v = (r_1+r_2)/2 = 2$. Portanto, $y_v = f(2) = -16 \cdot 2 \cdot (2-4) = 64$. Logo, a altura máxima do corpo projetado é 64. □

Exemplo 5. *Por três pontos, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$, tais que x_1, x_2 e x_3 são distintos, passa no máximo uma parábola.*

Prova. Precisamos demonstrar que se $f(x) = ax^2+bx+c$ e $g(x) = px^2+qx+r$ passam pelos pontos P_1, P_2 e P_3, então $a = p$, $b = q$ e $c = r$. Observe que a equação $f(x) = g(x)$ possui pelo menos três raízes distintas (x_1, x_2 e x_3) e veja que:

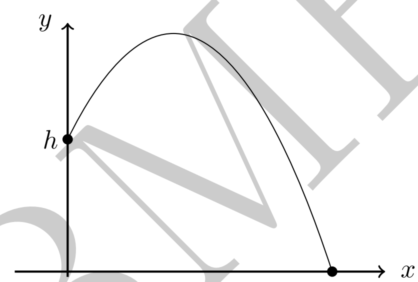
$$f(x) = g(x) \implies (a-p)x^2 + (b-q)x + (c-r) = 0.$$

Se a fosse diferente de p, teríamos uma equação do segundo grau com três raízes distintas, o que não é possível. Logo, $a = p$. Temos então que $(b-q)x + (c-r) = 0$. Pelo mesmo motivo, temos que $b = q$ e também que $c = r$, como queríamos demostrar. □

Problema 6 (CFTRJ adaptada). *Um objeto é lançado do topo de um muro de altura h, atingindo o solo após 5 segundos. A trajetória parabólica do objeto é representada pela equação $y = -0{,}5x^2 + bx + 2{,}5$, cujo gráfico está representado na figura a seguir, onde y indica a altura em metros atingida pelo objeto em relação ao solo, após x segundos do lançamento.*

(a) Calcule a altura h e o coeficiente b da equação da trajetória.

(b) Calcule a altura máxima, em relação ao solo, atingida pela objeto.



Solução. Seja $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + 2{,}5$.

(a) Temos que h é a altura do objeto no instante em que $x = 0$. Sendo assim,

$$h = f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 2{,}5 = 2{,}5.$$

Sabemos, ainda, que após 5 segundos o objeto encontra-se no solo, ou seja, $f(5) = 0$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} -0{,}5 \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2{,}5 = 0 &\implies \frac{-25}{2} + 5b + \frac{5}{2} = 0 \\ &\implies 5b = 10 \\ &\implies b = 2. \end{aligned}$$

Dessa maneira, temos que $y = -0{,}5x^2 + 2x + 2{,}5$.

(b) Agora, é fácil encontrar o vértice (x_v, y_v) da parábola, pois $a = -0{,}5$, $b = 2$ e $c = 2{,}5$. Logo, $x_v = \frac{-b}{2a} = 2$ e

$$y_v = f(x_v) = f(2) = -2 + 4 + 2{,}5 = 4{,}5.$$

Concluímos, pois, que a altura máxima atingida pelo objeto foi de 4,5 m.

□

4 Inequações do segundo grau

A visualização do gráfico de uma função de segundo grau também nos ajuda a resolver problemas sobre *inequações de segundo grau*. Nesse caso, no lugar de equações vamos estudar inequações, de forma que substituímos o sinal "=" por um dos sinais "<", ">", "≤" ou "≥". A forma canônica de uma inequação do segundo grau é uma expressão do tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$, onde a, b e c são dados e $a \neq 0$ (aqui, podemos substituir o "$\geq$" por "$>$", se necessário).

Uma vez que queremos que $ax^2+bx+c \geq 0$, concluímos que a solução de uma tal inequação corresponde aos valores de x para os quais o gráfico de $f(x) = ax^2+bx+c$ encontra-se acima do eixo-x ou sobre ele. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7. *Encontre todos os valores de x para os quais $x^2 - 5x + 4 > 0$.*

Solução. Primeiramente, vamos seguir os passos indicados na Seção 3 para desenhar o gráfico de $f(x) = x^2-5x+4$. Veja que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$.

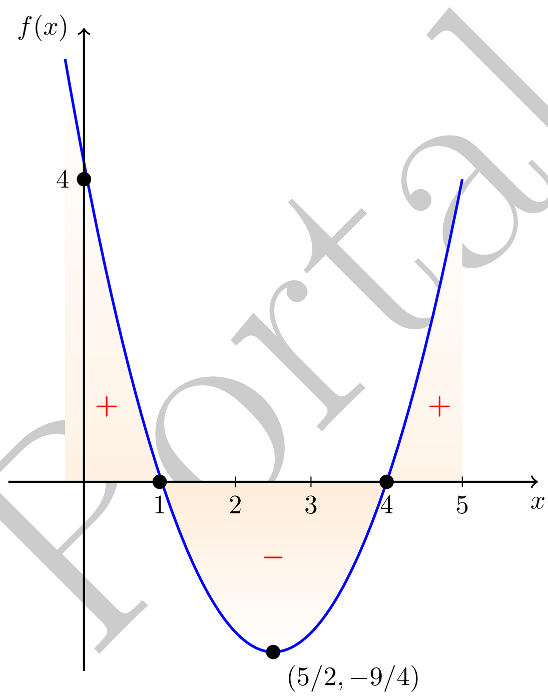
1. Temos $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$. Como $\Delta > 0$, temos duas raízes reais. Lembrando o que aprendemos sobre equações de segundo grau, por exemplo usando a fórmula de Bháskara, podemos encontrar que as raízes de $x^2-5x+4 = 0$ são $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$. Assim, o gráfico passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(4, 0)$.

2. Como $f(0) = 4$, o gráfico contém o ponto $(0, 4)$.

3. O vértice possui coordenadas $x_v = (2 + 3)/2 = 2{,}5$ e $y_v = -\Delta/(4a) = -9/4$. Logo, o vértice é o ponto $(5/2, -9/4)$.

4. A concavidade da função é para cima.

Coletando os fatos acima, temos o gráfico a seguir:



Veja que marcamos no gráfico as regiões onde a função é positiva e onde ela é negativa. Em particular, vemos que $f(x)$ é positiva quando $x < 1$ ou $x > 4$. □

Observação 8. *No exemplo anterior, veja que os números 1 e 4 não fazem parte da solução, pois a inequação do problema é estrita (i.e., temos o sinal '$>$'). Por outro lado, se a equação original fosse $x^2-5x+4 \geq 0$, a solução seria $x \leq 1$ ou $x \geq 4$.*

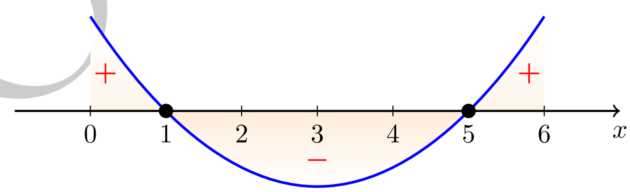
Conforme mostrado no próximo exemplo, nem sempre uma inequação de segundo grau é dada em sua forma reduzida (como $ax^2+bx+c \geq 0$). Contudo, em muitos casos basta fazer uma manipulação algébrica para, então, seguir os passos do exemplo anterior.

Exemplo 9. *Encontre todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $(x - 2)^2 \leq 2x - 1$.*

Solução. Como $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, a inequação dada é sucessivamente equivalente a

$$x^2 - 4x + 4 \leq 2x - 1 \Longleftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

No lugar de desenhar todo o gráfico, desta vez vamos concentrar nossa atenção apenas nos elementos que nos ajudam a resolver o problema. De fato, não é importante aqui saber quais as coordenadas do vértice. Basta observar que a equação $x^2-6x+5 = 0$ possui $\Delta = 4 > 0$ e raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 5$. Veja, ainda, que a concavidade é para cima. Assim, temos o esboço simplificado a seguir para o gráfico da função $x \mapsto x^2 - 6x + 5$:



Desta vez, a solução corresponde ao trecho do domínio em que a função é menor ou igual a zero, ou seja,

$$1 \leq x \leq 5.$$

□

Exemplo 10. *Encontre todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$.*

Solução. Considerando a equação $-x^2+2x-2 = 0$, temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -4$. Sendo assim, ela não possui raízes reais, de forma que o gráfico de $f(x) = -x^2+2x-2$ não toca o eixo-x. Ademais, como o coeficiente de x^2 é igual a -1, temos uma parábola com concavidade para baixo (observe o caso em que $a < 0$ e $\Delta < 0$ na Figura 2). Concluímos, então, que a função $f(x)$ é sempre negativa; logo, não existe qualquer valor real de x que satisfaça a inequação do enunciado. □

Exemplo 11. *Encontre todos os valores reais de x tais que $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.*

Solução. Neste caso, podemos ver que $\Delta = 0$, de forma que temos uma única raiz real, $x = 1$, para a equação subjacente. Uma vez que o gráfico tangencia o eixo-x (caso $a > 0$ e $\Delta = 0$ da Figura 2), concluímos que o único ponto em que a função é menor ou igual a zero é aquele em que ela é zero. Logo o único valor possível para x é 1. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em pelo menos quatro encontros de 50 minutos, com amplo tempo disponibilizado para resolução de exercícios. Estes podem ser encontrados no próprio Portal, assim como nas referências listadas abaixo.

A Seção 1.1 requer conhecimentos básicos sobre coordenadas no plano. Essencialmente, é preciso entender bem sistemas de coordenadas cartesianas e saber calcular a distância entre dois pontos. Isso pode ser estudado rapidamente antes do início desta aula, e também é tratando em detalhes no módulo "Geometria Analítica", do terceiro ano do Ensino Médio. Caso os alunos não tenham familiaridade com sistemas de coordenadas cartesianas, pode ser preferível pular as demonstrações da Seção 1.1 e apenas assumir que o gráfico da função quadrática é uma parábola, informando que isso será provado no futuro.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.