Material Teórico - Módulo de CONJUNTOS

Noções Básicas - Parte 01

9o Ano

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de outubro de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Intuitivamente, podemos entender um conjunto como uma *coleção de objetos*, sendo esses objetos reais ou abstratos. Alguns exemplos de conjuntos são:

- O conjunto de todos os estados do Brasil.
- O conjunto das estrelas de uma constelação.
- O conjunto de todos os estudantes da sua escola.
- O conjunto de todos os inteiros pares.

Observe que os três primeiros exemplos tratam de objetos que existem no mundo real, enquanto os objetos do quarto exemplo são abstrações. Os objetos de um conjunto são seus **elementos**.

Podemos descrever um conjunto de duas formas: ou *especificando* seus elementos, como fizemos nos exemplos acima, ou *listando* seus elementos. Por exemplo, podemos nos referir ao conjunto formado pelos números 1, 2, 3, 4.

Para denotar um conjunto, utilizamos uma letra latina maiúscula (A, B, C, D,...); também, especificamos ou listamos seus elementos entre chaves "{ }". Por exemplo,

$$A = \{\text{estados do Brasil}\};$$

$$B = \{\text{inteiros pares}\};$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Uma maneira mais formal de declarar os dois primeiros conjuntos acima seria escrever

$$A = \{x|\ x \text{ é estado do Brasil}\};$$

$$B = \{x|\ x \text{ é inteiro e par}\}.$$

No contexto de conjuntos, o símbolo | deve ser lido como "tal que" ou "tais que". Assim, declarando A e B como acima, lemos

A é o conjunto dos x tais que x é estado do Brasil

e

B é o conjunto dos x tais que x é inteiro e par.

Utilizamos a notação $x \in K$ (lê-se ***x* pertence a *K***) quando x é um dos elementos do conjunto K; por exemplo, sendo B e C os conjuntos que descrevemos logo acima, temos que $28 \in B$ e $2 \in C$. Por outro lado, escrevemos $x \notin K$ (lê-se ***x* não pertence a *K***) quando x não é um elemento do conjunto K; por exemplo, para os mesmos conjuntos B e C, temos $5 \notin B$ e $6 \notin C$.

Observação 1. *Conjuntos* não enxergam *elementos repetidos. Assim, tanto faz escrevermos* $C = \{1, 1, 2, 3, 4\}$ *quanto* $C = \{1, 2, 3, 4\}$*. Em ambos os casos, fica subentendido que* 1 *é elemento do conjunto* C uma única vez.

Para muitos propósitos, é conveniente termos à disposição a noção de um *conjunto sem elementos*, ao qual nos referiremos como o **conjunto vazio**. Ele pode ser pensado como o resultado de uma especificação de elementos *contraditória*, como por exemplo

$$\{\text{inteiros que são pares e ímpares}\}.$$

Denotaremos o conjunto vazio por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

1.1 Equivalência e igualdade entre dois conjuntos

Dois conjuntos são **iguais** se tiverem exatamente os mesmos elementos. Por exemplo, os conjuntos

$$A = \{\text{inteiros múltiplos de } 2\}$$

e

$$B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

são iguais, uma vez que têm os mesmos elementos.

Se os conjuntos X e Y forem iguais, escreveremos $X = Y$; se não forem iguais, escreveremos $X \neq Y$ e diremos que são **diferentes** ou **distintos**. Nesse caso, observe que pelo menos um, dentre X e Y, precisa ter um elemento que não pertence ao outro, como em $X = \{1,2,3\}$ e $Y = \{1, 2\}$: temos $X \neq Y$, pois X tem um elemento (o 3) que não pertence a Y.

Por outro lado, dizemos que dois conjuntos são **equivalentes** se seus elementos puderem ser colocados em *correspondência biunívoca*, isto é, se pudermos associar cada elemento de um desses conjuntos a um único elemento do outro, e vice-versa, de forma que elementos diferentes do primeiro conjunto são associados a elementos diferentes do segundo conjunto.

Para entender o conceito de equivalência de conjuntos, note que os conjuntos C e D dados por

$$C = \{a, b, c, d, e\} \ \text{ e } \ D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

são equivalentes. Realmente, uma possível correspondência biunívoca entre seus elementos é:

$$1 \leftrightarrow a, \quad 2 \leftrightarrow b, \quad 3 \leftrightarrow c, \quad 4 \leftrightarrow d, \quad 5 \leftrightarrow e.$$

(Há outras! Você é capaz de listar uma?)

Como no exemplo acima, escreveremos $C \leftrightarrow D$ para denotar a equivalência entre os conjuntos C e D.

Observe que dois conjuntos iguais são equivalentes, mas dois conjuntos equivalentes não são necessariamente iguais. À primeira vista, a definição de equivalência entre conjuntos pode parecer "boba", mas ela é fundamental para definirmos o que é um conjunto *finito*.

Dizemos que um conjunto A é **finito** se A é vazio ou equivalente a um conjunto da forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se A for vazio, diremos que tem 0 elementos; se A for finito e equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, diremos que A tem ***n* elementos** ou **cardinalidade *n***. Em qualquer caso, denotamos o número de elementos de um conjunto finito A escrevendo $|A|$ ou $\#A$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 7, 8\}$, então $|A| = 6$ e $\#B = 4$.

Conjuntos que não são finitos são ditos **infinitos**. Alguns exemplos de conjuntos infinitos são $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{x|\ x \text{ é inteiro par}\}$.

2 Diagramas de Venn

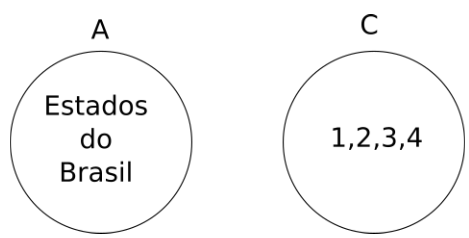
Já aprendemos que podemos representar um conjunto descrevendo seus elementos entre chaves. Outra forma de representar um conjunto é através de um desenho conhecido como **diagrama de Venn**. Nesse tipo de representação, utilizamos um círculo (ou outra curva simples fechada qualquer) para substituir os parênteses, especificando ou listando os elementos do conjunto numa das porções do plano delimitadas pela curva (usualmente, escolhemos a região *limitada*; em particular, no caso de a curva traçada ser um círculo, listamos os elementos no disco correspondente). Por exemplo, os conjuntos

$$A = \{\text{estados do Brasil}\}$$

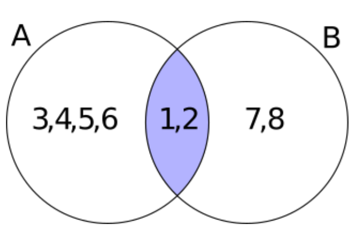
e

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

podem ser representados pelos diagramas de Venn a seguir:



A vantagem de usar diagramas de Venn é que eles tornam muito mais fácil entender as relações entre conjuntos distintos. Por exemplo, se quisermos ressaltar que 1 e 2 são elementos de ambos os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 7,\ 8\}$, podemos compor diagramas de Venn para A e B como ilustrado a seguir:



Na figura acima, veja que os elementos 1 e 2, por pertencerem aos dois conjuntos, foram representados na região interior aos dois círculos.

Uma vez que essa situação (de conjuntos com elementos em comum) é muito frequente, declaramos a **interseção** dos conjuntos X e Y como o conjunto formado pelos elementos comuns a X e Y. Em particular, na figura anterior, a curva que limita a região em azul é o diagrama de Venn da interseção dos conjuntos A e B.

Empregaremos o símbolo $\cap$ para representar a operação de interseção entre dois conjuntos. Assim, temos a especificação:

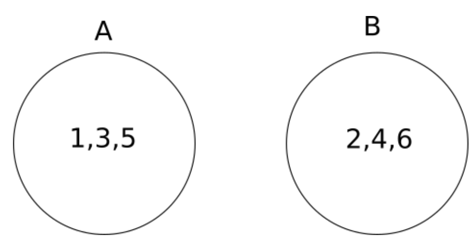
$$X \cap Y = \{a|\, a \in X \text{ e } a \in Y\}.$$

Por exemplo, em relação à figura anterior, temos $A \cap B = \{1, 2\}$.

2.1 Casos especiais de interseção

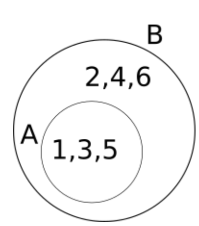
Agora, vamos considerar dois casos especiais da interseção entre conjuntos e aproveitá-los para apresentar novas definições úteis.

I. Primeiro caso: quando dois conjuntos A e B não possuem elementos em comum, temos $A \cap B = \emptyset$. Neste caso, é usual que os diagramas de Venn para A e B sejam dois círculos sem sobreposição. É o que ocorre quando $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$:



Quando dois conjuntos têm interseção vazia, dizemos que eles são **disjuntos**.

II. Segundo caso: quando os conjuntos A e B são tais que todos os elementos de A também são elementos de B os diagramas de Venn correspondentes são tais que um está contido no interior do outro. Esse é o caso quando $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, conforme mostrado a seguir.



Quando um caso como este ocorre, dizemos que ***A* é um subconjunto de *B*** ou que ***A* está contido em *B***, e utilizamos a simbologia $A \subseteq B$. Também podemos dizer que ***B* contém *A***, em cujo caso escrevemos $B \supseteq A$. Como caso particular importante, note que sempre temos $A \subseteq A$.

Dados dois conjuntos A e B, é um *axioma*[1] da teoria dos conjuntos que uma das duas possibilidades a seguir ocorre:

$$B \subseteq A \quad \text{ou} \quad B \not\subseteq A.$$

Além disso, essas possibilidades são *mutuamente excludentes*, quer dizer, não podem ocorrer simultaneamente. Isto porque, para que $B \subseteq A$, todo elemento de B também deve ser elemento de A; por outro lado, para que $B \not\subseteq A$, deve existir um elemento x de B tal que $x \notin A$. Ora, se um tal x existe, então ele evita que tenhamos $B \subseteq A$.

Um caso muito importante de inclusão, que em princípio pode parecer muito estranho, é dado pela seguinte

Proposição 2. *Para todo conjunto A, temos $\emptyset \subseteq A$.*

Prova. Já sabemos que ou $\emptyset \subseteq A$ ou $\emptyset \not\subseteq A$, e que tais possibilidades são mutuamente excludentes. Assim, basta mostrarmos que não é possível termos $\emptyset \not\subseteq A$.

Para que $\emptyset \not\subseteq A$ ocorra, deve existir um elemento x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Mas, como $\emptyset$ não tem elementos, um tal x não pode existir.

Logo, a possibilidade $\emptyset \not\subseteq A$ não ocorre, e resta somente a possibilidade $\emptyset \subseteq A$, que deve ser verdadeira. $\square$

3 A família das partes de um conjunto

Os elementos de um conjunto podem ser outros conjuntos. Isso é o que ocorre, por exemplo, com

$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Um conjunto cujos elementos são outros conjuntos é geralmente denominado uma **família**.

Um caso especialmente importante de família ocorre quando consideramos um conjunto A e, a partir dele, formamos a família cujos elementos são os subconjuntos de A. Denotamos essa família por $P(A)$, e dizemos que se trata da **família das partes de A**. Assim,

$$P(A) = \{B |\ B \subseteq A\}.$$

Para um exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, temos

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Um exemplo interessante é $P(\emptyset)$, a família das partes do conjunto vazio. Como $\emptyset$ não possui elementos, seu único subconjunto é ele mesmo. Assim,

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Note que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, uma vez que a primeira notação representa o conjunto vazio, enquanto a segunda representa o conjunto com um único elemento, o conjunto vazio. Em particular, verifique que

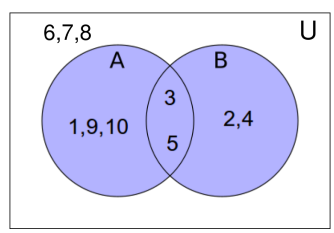
$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Na próxima aula, mostraremos como calcular o número de elementos de $P(A)$, para um conjunto *finito* A.

4 Outras operações com conjuntos

Na seção anterior, aprendemos uma operação básica entre dois conjuntos, a interseção. Nesta, aprenderemos outras operações, a *complementação de conjuntos*, a *união de conjuntos* e a *diferença de conjuntos.* Antes disso, contudo, precisamos definir o conceito de *conjunto universo* pra um certo contexto.

Em um certo contexto, que supomos fixado, o **conjunto universo** é o conjunto que contém todos os elementos pertinentes ao contexto. Por exemplo, se estivermos pensando em um problema que envolve apenas os números naturais menores do que 10, o conjunto universo será representado por $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$. Assim, os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 9, 10\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ são representados usando o seguinte diagrama de Venn (observe que alguns elementos estão de fora dos dois círculos que representam os conjuntos A e B):



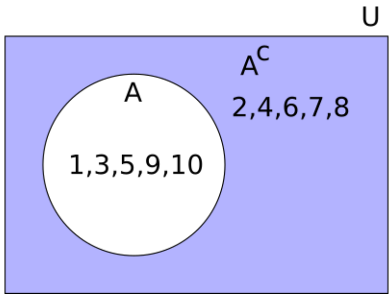
Em geral, dados um conjunto universo U e um subconjunto A de U, o conjunto de todos os elementos de U que não estão em A é o **complementar de A em U**, o qual é representado por A^c, sempre que U estiver subentendido (o que será sempre o caso). Em símbolos,

$$A^c = \{x |\ x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Assim, no caso em que $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$ e $A = \{1, 3, 5, 9, 10\}$, temos $A^c = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

Utilizando o diagrama de Venn, o conjunto complementar é representado pela região do conjunto universo que ***fica fora de A***.

[1] Em Matemática, um **axioma** é um fato aceito como verdadeiro *sem justificativa.*

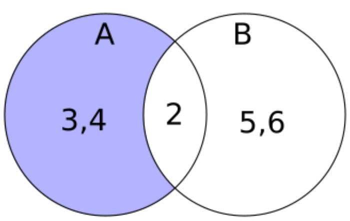


4.1 A diferença entre dois conjuntos

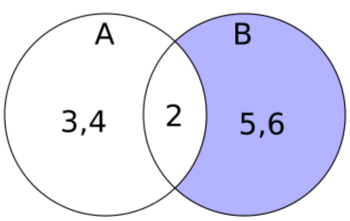
Quando temos dois conjuntos A e B, também podemos definir a operação de *diferença* entre esses conjuntos, cujo resultado é denotado por $A - B$ ou $A \setminus B$ (ambas as notações são muito utilizadas). De maneira informal, $A \setminus B$ é conjunto formado por todos os elementos A que não estão B; ou seja,

$$A \setminus B = \{x|\ x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 5, 6\}$, temos que $A \setminus B = \{3, 4\}$. Em termos visuais, podemos representar esse exemplo através do diagrama de Venn a seguir:



O exemplo acima também mostra que os conjuntos $A \setminus B$ e $B \setminus A$ não são iguais. De fato, $B \setminus A = \{5, 6\}$.



Se A e B forem subconjuntos de um universo U, então $x \notin B$ é o mesmo que $x \in B^c$. Portanto,

$$B^c = U - B.$$

Ainda nesse caso, temos, mais geralmente, que

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x|\ x \in A \text{ e } x \notin B\} \\ &= \{x|\ x \in A \text{ e } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c. \end{aligned}$$

$A \setminus B = A \cap B^c$.

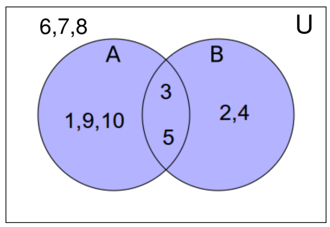
4.2 A união de dois conjuntos

Além da interseção, outra importante operação envolvendo conjunto é a *união*. Antes de defini-la, cumpre fazermos a seguinte observação: no contexto de teoria dos conjuntos, sempre que escrevemos $x \in A$ *ou* $x \in B$, assumimos que esse "*ou*" é *inclusivo*, isto é, permite que as possibilidades $x \in A$, $x \in B$ ocorram simultaneamente.

Dados dois conjuntos A e B, sua **união**, denotada por $A \cup B$ é definida como o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto A ou no conjunto B:

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Visualmente, utilizando diagramas de Venn, a união é representada pela junção dos diagramas que representam os conjuntos A e B. Por exemplo, na figura a seguir, $A \cup B$ é representado pela porção azul do diagrama.



Se A e B são conjuntos finitos, não é difícil o leitor se convencer de que $A \cap B$ e $A \cup B$ também são finitos. Nesse caso, o diagrama de Venn de $A \cup B$ permite estabelecer a seguinte relação simples entre as cardinalidades de A, B, $A \cap B$ e $A \cup B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

Isso ocorre pois, ao escolhermos um elemento x do conjunto $A \cup B$ temos três possibilidades:

(i) O elemento x está em A, mas não está em B.

(ii) O elemento x está em B, mas não está em A.

(iii) O elemento x está simultaneamente em A e B.

Assim, quando escrevemos $|A \cup B| = |A| + |B|$, estamos cometendo o erro de contar os elementos que pertencem à interseção de A e B duas vezes: uma quando contamos os elementos de A, outra quando contamos os elementos de B. Para corrigir este erro, devemos *descontar* os elementos de $A \cap B$ uma vez, resultando na fórmula acima.

Exercitaremos a aplicação de (1) na próxima aula.

4.3 A diferença simétrica entre dois conjuntos

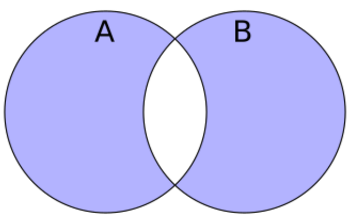
Outra operação que pode ser aplicada em dois conjuntos é a **diferença simétrica** $A\Delta B$ (lê-se "*A delta B*" (se você já estudou equações do segundo grau, chamamos sua atenção para o fato de que esse símbolo Δ não tem nada a ver com o discriminante de um trinômio de segundo grau). Definimos

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Em palavras $A\Delta B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a *exatamente um* dos conjuntos A, B. Por exemplo, se $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 5, 6\}$, temos que

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= \{3, 4\} \cup \{5, 6\} \\ &= \{3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

A diferença simétrica está ilustrada na região destacada no seguinte diagrama de Venn:



Esse diagrama também deixa claro que $A\Delta B$ pode ser definida por

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Realmente, se pintarmos, as porções do diagrama de Venn para os conjuntos A e B correspondentes aos conjuntos $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ e $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, então teremos pintado exatamente as mesmas porções do diagrama.

4.4 Extensões a mais de dois conjuntos

As operações de união e interseção podem ser facilmente estendidas a mais de dois conjuntos, graças às seguintes identidades:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{2}$$

e

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \tag{3}$$

Para verificá-las, observe inicialmente que os dois membros de ambas têm sentido: uma vez que sabemos formar a interseção de dois conjuntos, podemos considerar o conjunto $A\cap B$ e, então, $(A\cap B)\cap C$; da mesma forma, podemos considerar $(B \cap C)$ e $A \cap (B \cap C)$, e observações análogas valem para $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$.

Agora, mostremos (2), deixando a checagem da validade de (3) a cargo do leitor:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= \{x|\ x \in A \cap B \text{ e } x \in C\} \\ &= \{x|\ (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ e } x \in C\} \\ &= \{x|\ x \in A \text{ e } (x \in B \text{ e } x \in C)\} \\ &= \{x|\ x \in A \text{ e } x \in B \cap C\} \\ &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

Graças a (2) e (3), dados conjuntos A, B e C, podemos definir a interseção $A \cap B \cap C$ e a união $A \cup B \cup C$ *de maneira não ambígua* pondo

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$

(ou $A \cap (B \cap C)$, tanto faz!) e

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C.$$

(Ou $A \cup (B \cup C)$; novamente, tanto faz!) Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, então

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{2\} \cap \{3, 4, 5\} = \emptyset$$

e

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= (A \cup B) \cup C \\ &= \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

5 Leitura complementar

John Venn (1834 - 1923) foi um matemático inglês que ficou conhecido por introduzir de maneira formal diagramas geométricos para representar conjuntos. Venn desenvolveu esses diagramas em um trabalho de 1881, baseando-se na teoria de George Boole sobre como representar algebricamente as operações da lógica proposicional.

Embora representações similares aos diagramas de Venn já fossem utilizadas por outros matemáticos, como Leibniz, o próprio Boole, de Morgan e Euler, o método de Venn era mais claro e simples. Além disso, Venn foi o primeiro a utilizar estes diagramas em problemas gerais envolvendo mais de dois conjuntos.

Figura 1: Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/John_Venn`

Em 04/08/2014 o Google lançou um *doodle* em homenagem ao 180^o aniversário de John Venn. Você pode conferi-lo no link a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=sZwCCTRKUO4

6 Sugestões ao professor

Professor, a teoria dos conjuntos é central em Matemática e alicerça muitos conceitos que serão apresentados durante todo o Ensino Médio, como funções, métodos de contagem, probabilidade e Estatística. Dessa forma, é de extrema importância que os alunos compreendam a linguagem que foi apresentada neste material, pois ela será recorrente ao longo de todo o Ensino Médio.

A apresentação inicial da teoria dos conjuntos pode torna-se tediosa para alguns alunos, devido à grande quantidade de definições e notações que devem ser introduzidas antes de propor exercícios minimamente interessantes. O professor pode quebrar a monotonia pedindo que os alunos participem da aula, criando seus próprios exemplos para as operações básicas ou contando a história do matemático Venn quando seus diagramas forem apresentados.

Recomendamos que o material apresentado neste material seja ensinado em dois encontros de 50 minutos cada.