Material Teórico - Módulo de CONJUNTOS

Noções Básicas - Parte 02

9o Ano

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

9 de novembro de 2019

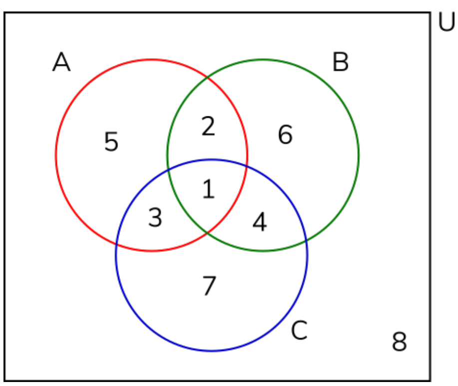
1 Introdução

Neste material aprofundaremos o conceito de diagramas de Venn para o caso que envolve mais de dois conjuntos. Essa situação é recorrente em diversos exames e avaliações e deve ser estudada com cuidado. Além disso, faremos alguns exercícios para fixar o conteúdo deste módulo.

2 Diagramas com três conjuntos

Após definirmos as principais operações entre dois conjuntos, estamos prontos para aplicar nossos conhecimentos para resolver problemas mais elaborados, envolvendo relações entre três ou mais conjuntos.

A título de ilustração, considere o diagrama a seguir no qual os números de 1 a 8 representam não elementos, mas regiões do diagrama que declararemos logo mais.



Veja que o diagrama se encontra dividido em oito regiões *canônicas*:

- Região 1: O conjunto dos elementos que estão em A, B e C, denotado por $A \cap B \cap C$.
- Região 2: O conjunto dos elementos que estão em A e B, mas não em C, denotado por $A \cap B \cap C^c$.
- Região 3: O conjunto dos elementos que estão em A e C, mas não em B, denotado por $A \cap C \cap B^c$.
- Região 4: O conjunto dos elementos que estão em B e C, mas não em A, denotado por $B \cap C \cap A^c$.
- Região 5: O conjunto dos elementos que estão em A, mas não em B nem em C, denotado por $A \cap B^c \cap C^c$.
- Região 6: O conjunto dos elementos que estão em B, mas não em A nem em C, denotado por $B \cap A^c \cap C^c$.
- Região 7: O conjunto dos elementos que estão em C, mas não em A nem em B, denotado por $C \cap B^c \cap A^c$.
- Região 8: O conjunto dos elementos que não estão em A, nem em B nem em C, denotado por $A^c \cap B^c \cap C^c$.

Qualquer conjunto não vazio, gerado a partir de uma combinação dos conjuntos A, B e C através das operações que aprendemos na aula anterior, pode ser representado como união de uma ou mais dessas regiões canônicas. Por exemplo,

$A \cap B$ é a união das regiões 1 e 2.
$A^c \cup C$ é a união das regiões 4, 6, 7 e 8.
$B \cup C$ é a união das regiões 1, 2, 3, 4, 6 e 7.

Isso representa uma enorme vantagem para resolver problemas que envolvem contagem dos elementos de três conjuntos. Realmente, nesses tipos de problemas, uma boa estratégia é começar descobrindo os números de elementos das regiões "mais ao centro". Ou seja, (se possível) descobrir primeiro o número de elementos da região 1, depois das regiões 2, 3 e 4, seguindo para as regiões 5, 6 e 7 para, finalmente, descobrir o número de elementos da região 8.

3 Quantidade de subconjuntos

A seguir, listamos todos os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Observe como, a fim de facilitar a listagem, organizamos os subconjuntos de acordo com suas quantidades de elementos:

# elementos	subconjuntos
0	$\emptyset$
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
2	$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$
3	$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$
4	$\{1,2,3,4\}$

Contando os conjuntos da tabela, vemos que $A = \{1,2,3,4\}$ tem exatamente 16 subconjuntos. De modo geral, um conjunto com n elementos tem precisamente 2^n subconjuntos. Para verificarmos esse resultado, veja que, para formar um subconjunto B do conjunto A, temos de decidir, para cada um dos n elementos de A, se ele pertence ou não pertence a B. Temos, então, duas possibilidades para cada um dos n elementos, o que totaliza

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n$$

maneiras distintas de formar o subconjunto B.

4 Exercícios

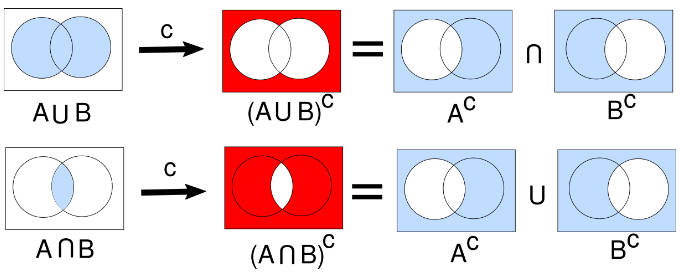
Nesta seção, colecionamos alguns exercícios resolvidos, com o intuito de desenvolver no leitor a habilidade de trabalhar com diagramas de Venn.

Exercício 1. *Utilize diagramas de Venn para explicar porque as seguintes identidades, conhecidas como* **Leis de De Morgan**, *são verdadeiras:*

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Solução. É suficiente verificar que, nos diagramas apresentados na figura a seguir, as igualdades são verdadeiras: $\square$



Exercício 2. *Em uma turma do primeiro ano há 25 jogadores de futebol e 16 jogadores de basquete, e ninguém pratica outro esporte. Se 7 pessoas praticam os dois esportes, quantas pessoas diferentes praticam pelo menos um dos dois esportes?*

(a) 34.

(b) 33.

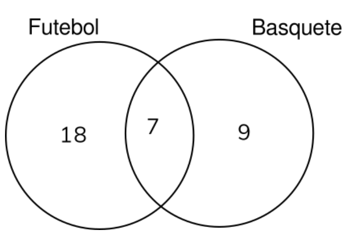
(c) 32.

(d) 31.

(e) 30.

Solução. Denotemos por F e B os conjuntos de alunos da turma que jogam futebol e basquete, respectivamente. O problema pede claramente para calcularmos o número de elementos de $F \cup B$, dado que $|F| = 25$, $|B| = 16$ e $|F \cap B| = 7$.

Observando o diagrama de Venn a seguir, percebemos facilmente que $25 - 7 = 18$ pessoas jogam apenas futebol e $16 - 7 = 9$ jogam apenas basquete. Assim, $18 + 7 + 9 = 34$ pessoas jogam pelo menos um dos dois esportes.



Alternativamente, sabemos que

$$\begin{aligned} |F \cup B| &= |F| + |B| - |F \cap B| \\ &= 25 + 16 - 7 = 34. \end{aligned}$$

$\square$

Exercício 3. *Seja A um subconjunto de 5 elementos do conjunto $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, e seja $S(A)$ a soma dos elementos A. Quantos são os possíveis valores de $S(A)$?*

(a) 5.

(b) 6.

(c) 15.

(d) 16.

(e) 40.

Solução. Veja que a menor soma possível dos elementos de um subconjunto formado por 5 elementos de X é $1+2+3+4+5 = 15$, enquanto que a maior $6+7+8+9+10 = 40$.

Além disso, qualquer valor de 15 a 40 pode ser obtido através da soma de cinco elementos. Para ver isso, começando com o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, que tem a menor soma possível, basta trocar o maior elemento de A que possui sucessor em X e tal que este sucessor não esteja em A, e assim por diante (por exemplo, trocamos A por $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, depois por $\{1, 2, 3, 4, 7\}$, etc; quando chegarmos a $\{1, 2, 3, 4, 10\}$, o próximo conjunto será $\{1, 2, 3, 5, 10\}$, etc. Veja que este procedimento irá, a cada troca, adicionar 1 à soma dos elementos.

Assim, existem exatamente $40 - 25 + 1 = 16$ somas possíveis. $\square$

Exercício 4 (FGV). *Dados dois conjuntos não vazios A e B, se ocorrer $A \cup B = A$, podemos afirmar que:*

(a) $A \subset B$.

(b) *isso nunca pode ocorrer.*

(c) *B é um subconjunto de A.*

(d) *B é um conjunto unitário.*

(e) *A é um subconjunto de B.*

Solução. Caso o conjunto B tenha algum elemento que não pertença a A, então esse elemento também pertenceria a $A \cup B$ mas não pertenceria a A; logo, não poderíamos ter $A \cup B = A$. Dessa forma, a única maneira pela qual podemos ter $A \cup B = A$ é se todos os elementos B também forem elementos de A. Isso significa que B é um subconjunto de A.

Reciprocamente, se $B \subset A$, então, ao formarmos $A \cup B$, não acrescentamos nenhum elemento novo a A, de forma que, realmente, $A \cup B = A$.

A resposta correta é, portanto, o item (b). $\square$

Exercício 5 (UFC 2003). *Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, então o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:*

(a) *o triplo do número de elementos de M.*

(b) *o triplo do número de elementos de N.*

(c) *o quádruplo do número de elementos de M.*

(d) *o dobro do número de elementos de M.*

(e) *o dobro do número de elementos de N.*

Solução. Suponha que M tem x elementos e N tem y elementos. Assim, M possui 2^x subconjuntos, ao passo que N possui 2^y subconjuntos. Pelo enunciado, sabemos que $2^x = 2 \cdot 2^y$, isto é, $2^x = 2^{y+1}$. Portanto, $x = y + 1$, ou seja, M tem um elemento a mais do que N. Agora, usando a fórmula $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap P|$, temos

$$|M \cup N| = x + y - 1 = (y + 1) + y - 1 = 2y.$$

Assim, a resposta correta é a letra (e). □

Exercício 6 (ENEM 2004). *Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:*

(a) 135.

(b) 126.

(c) 118.

(d) 114.

(e) 110.

Solução. A resposta correta é o item (c).

Para entender porque, criemos um diagrama de Venn em que cada círculo representa o conjunto de páginas originais de um catálogo. Sabemos que $|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = 4$. Com isso, calculamos sucessivamente (acompanhe no diagrama)

$$|C_1 \cap C_2 \cap C_3^c| = 10 - 4 = 6;$$

$$|C_1^c \cap C_2 \cap C_3| = 5 - 4 = 1;$$

e

$$|C_1 \cap C_2^c \cap C_3| = 6 - 4 = 2.$$

Assim,

$$|C_1 \cap C_2^c \cap C_3^c| = 50 - 6 - 4 - 2 = 38;$$

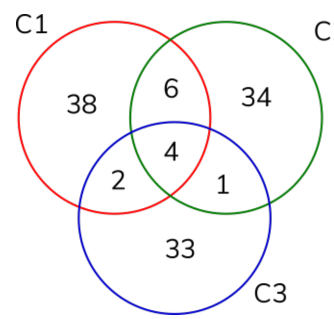
$$|C_1^c \cap C_2 \cap C_3^c| = 45 - 6 - 4 - 1 = 34;$$

$$|C_1^c \cap C_2^c \cap C_3| = 40 - 4 - 2 - 1 = 33.$$

Por fim,

$$|C_1 \cup C_2 \cup C_3| = 38 + 34 + 33 + 6 + 2 + 1 + 4 = 118.$$

□



Exercício 7 (ITA). *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e considere as afirmações a seguir:*

I. $(A \setminus B)^c \cap (B \cup A^c)^c = \emptyset$.

II. $(A \setminus B^c)^c = B \setminus A^c$.

III. $[(A^c \setminus B) \cap (B \setminus A)]^c = A$.

Sobre elas, podemos garantir que:

(a) *apenas a afirmação I é verdadeira.*

(b) *apenas a afirmação II é verdadeira.*

(c) *apenas a afirmação III é verdadeira.*

(d) *todas as afirmações são verdadeiras.*

(e) *apenas as afirmações I e II são verdadeiras.*

Solução. Para resolver esse problema precisamos de dois fatos importantes:

- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- As Leis de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Agora iremos utilizar esses resultados para simplificar os conjuntos apresentados em cada item.

I. Este item é verdadeiro, uma vez que

$$\begin{aligned}(A \setminus B)^c \cap (B \cup A^c)^c &= (A \cap B^c)^c \cap (B^c \cap A) \\ &= (A^c \cup B) \cap (B^c \cap A) = \emptyset.\end{aligned}$$

II. Este item é falso, pois, por um lado,

$$(A \setminus B^c)^c = (A \cap B)^c = A^c \cup B^c = (A \cap B)^c;$$

por outro, $B \setminus A^c = B \cap A$.

III. Este item também é falso, pois

$$\begin{aligned}[(A^c \setminus B) \cap (B \setminus A)]^c &= [(A^c \cap B^c) \cap (B \cap A)]^c \\ &= (A \cup B) \cup (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup A^c) \cup (B \cup B^c) \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$\square$

5 Sugestões ao rofessor

Separe pelo menos dois encontros de 50 minutos cada para apresentar o conteúdo deste material. Dedique especial atenção ao exercício que demonstra as Leis de De Morgan. Esse resultado pode ajudar a resolver problemas mais desafiadores, como é o caso do último exercício deste material.