Módulo de Conjuntos

Noções Básicas

9° ano E.F.

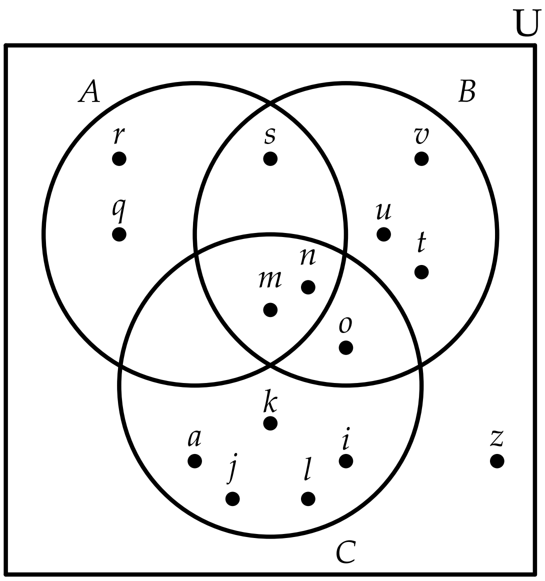
Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Conjuntos
Noções Básicas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Analise o diagrama abaixo e conclua como verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes justificando as falsas:



a) (_____) O conjunto A tem cinco elementos.

b) (_____) O conjunto B tem exatamente três elementos.

c) (_____) Há três elementos comuns entre B e C.

d) (_____) Há exatamente dois elementos comuns aos três conjuntos.

e) (_____) Três elementos são exclusivos de A em relação a B e C.

f) (_____) $r \in A$.

g) (_____) $s \in (A \cap B)$.

h) (_____) $\{m, n\} \subset (A \cap B \cap C)$.

i) (_____) O conjunto A tem 2^6 subconjuntos.

j) (_____) $\emptyset \subset B$.

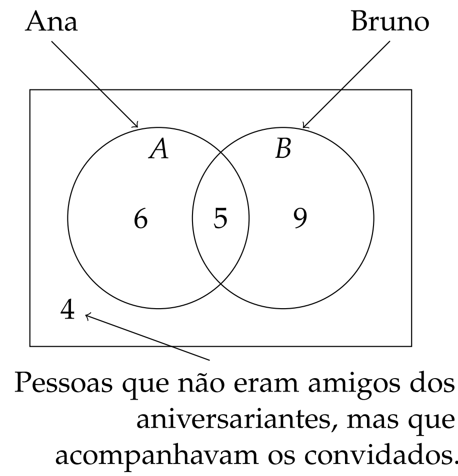
k) (_____) $|(A \cup B) - C| = 7$

l) (_____) $C - B = \{a, i, j, k, l\}$.

m) (_____) $(A \cap B) - C$ é um conjunto unitário.

n) (_____) $(A \cap C) - B = \emptyset$.

Exercício 2. Ana e Bruno são irmãos gêmeos e convidaram alguns amigos para sua festa de aniversário na qual apenas estariam os aniversariantes, seus amigos e algumas pessoas acompanhando os convidados. O diagrama abaixo enumera aqueles que são amigos só de Ana, só de Bruno, de ambos e alguns que foram acompanhando os convidados, mas não eram amigos de nenhum dos aniversariantes.



Sendo assim, responda:

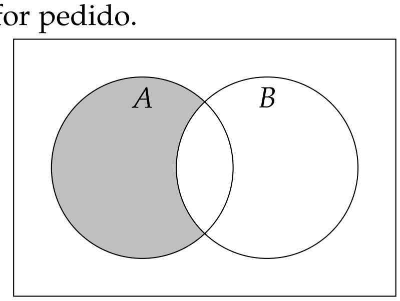
a) Quantas pessoas presentes na festa eram amigas exclusivamente de Ana?

b) Quantas pessoas presentes na festa eram amigas exclusivamente de Bruno?

c) Quantas pessoas presentes na festa eram amigas de ambos?

d) Quantas pessoas estavam na festa?

Exercício 3. Observe o diagrama abaixo com a região pintada $(A - B)$ e depois represente novos diagramas com o que for pedido.



a) $(B - A)$.

b) $(A \cap B)$.

c) $(A \cup B)$.

d) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

e) $(\overline{A \cup B})$.

Exercício 4. Marcela pesquisou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB, Rock e Axé. Dos 38 entrevistados, temos que:

- 18 gostam de MPB;
- 19 de Rock:
- 14 de Axé:
- 7 gostam de MPB e Rock;
- 5 gostam de Rock e Axé;
- 3 de MPB e Axé; e
- 2 dos três gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele:

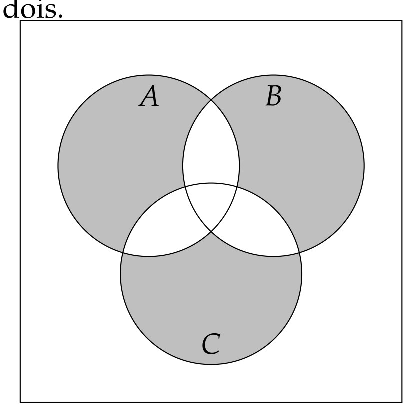
a) goste somente de Axé?

b) não goste de MPB?

Exercício 5. Em uma empresa multinacional, trabalham 45 funcionários que falam Inglês ou Espanhol, dos quais 40 sabem falar inglês e 25 sabem falar inglês e espanhol. Escolhendo-se aleatoriamente um funcionário dessa empresa, qual a probabilidade de que ele fale inglês e não fale espanhol? Quantos falam apenas Espanhol?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. O diagrama abaixo destaca a união das regiões exclusivas dos conjuntos A, B e C em relação aos outros dois.



Usando o mesmo modelo de três conjuntos entrelaçados, destaque as regiões:

a) $(A \cap C) - B$

b) $(B \cap C) \cup A$

c) $[C - (A \cup B)] \cup [(A \cap B) - C]$

Exercício 7. Em uma travessa há 40 salgadinhos de mesmos formato e tamanho: 26 deles contêm queijo, 22 são de palmito e alguns com queijo e palmito no recheio. Qual a probabilidade de retirar aleatoriamente um salgadinho dessa travessa que contenha apenas queijo no recheio?

Exercício 8. Em uma orquestra de cordas, sopro e percussão, 23 pessoas tocam instrumentos de corda, 18 tocam instrumentos de sopro e 12 tocam instrumentos de percussão. Nenhum de seus componentes toca os três tipos de instrumentos, mas 10 tocam instrumentos de corda e sopro, 6 tocam instrumentos de corda e percussão e alguns tocam instrumentos de sopro e percussão. No mínimo, quantos componentes há nessa orquestra?

Exercício 9. A quantidade de n carros saem do ponto M, conforme a figura 2 e, sem passar duas vezes pelo mesmo ponto, chegam ao ponto P. Sabe-se que 17 carros passaram por A, B e C; 25 carros passaram por A e C; 28 carros passaram por B e C. Qual o valor de n?

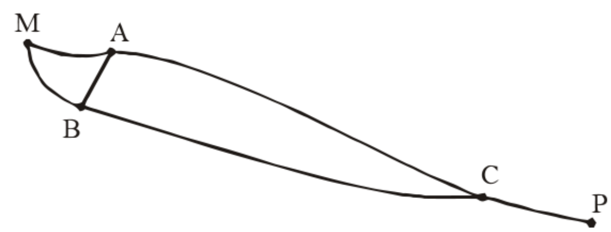


Figura 2

Exercício 10. Numa sala de aula com 60 alunos, 11 jogam xadrez, 31 são homens ou jogam xadrez e 3 mulheres jogam xadrez. Calcule o número de homens que não jogam xadrez, o número de homens que jogam xadrez e o número de mulheres que não jogam xadrez.

Exercício 11. Divida os números 1, 2, 3, 4, 5 em dois conjuntos quaisquer. Prove que um dos conjuntos contém dois números e sua diferença.

Exercício 12. Seja $\mathcal{A}$ um subconjunto de $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ com exatamente 90 elementos e S a soma dos elementos $\mathcal{A}$. Quantos são os possíveis valores de S?

Exercício 13. João fez um curso de verão com carga horária de 21 horas aula, sendo que nos dias em que tinha aula, João tinha somente 1 hora aula. Quantos dias durou o curso, sabendo que as aulas ocorriam exclusivamente no período da manhã ou no período da tarde e houve 15 tardes e 16 manhãs sem aula durante o referido curso?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Um inteiro positivo ascendente é aquele que possui em sua representação decimal ao menos dois dígitos e cada um deles é menor que o algarismo da ordem à sua direita, por exemplo, 12, 358 e 4579 são números ascendentes enquanto 1, 44 e 132 não são. Quantos inteiros positivos ascendetes existem?

Exercício 15. Um ciclo de três conferências teve sucesso constante, isto é, em cada sessão havia o mesmo número de assistentes. No entanto, a metade dos que compareceram à primeira não voltou mais; um terço dos que compareceram à segunda conferência assistiu apenas a ela e um quarto dos que compareceram à terceira não assistiu nem à primeira nem à segunda. Sabendo que havia 300 inscritos e que cada um assistiu a pelo menos uma conferência, determine:

a) quantas pessoas compareceram a cada conferência?

b) quantas pessoas compareceram às três conferências?

Exercício 16. Uma companhia aérea realizou um voo entre São Paulo (SP) e Fortaleza (FOR), com escalas em Belo Horizonte (BH) e Brasília (BRA), nessa ordem. A tabela ao lado mostra o número de passageiros (n) que estavam em cada trecho (t) desse voo. As quantidades indicadas para os trechos que têm uma cidade intermediária de conexão estão consideradas em cada trecho de voo direto. Por exemplo, os 80 passageiros do trecho 2 estão contados também nos trechos 1 e 4.

t	Decolagem	Aterrissagem	n
1	SP	BH	180
2	SP	BRA	80
3	SP	FOR	50
4	BH	BRA	200
5	BH	FOR	90
6	BRA	FOR	210

Qual a quantidade total de passageiros que essa companhia aérea transportou nessa operação?

Exercício 17. Em uma classe com 35 estudantes pesquisou-se sobre os gostos relativos a matemática e literatura e constatou-se que:

- 7 homens gostam de matemática;
- 6 homens gostam de literatura;
- 5 homens e 8 mulheres não para ambos;
- há 16 homens na classe;
- 5 estudantes gostam de ambos; e
- 11 estudantes somente de matemática.

Quantas mulheres gostam apenas de literatura?

Respostas e Soluções.

1. De início, temos que

$$A = \{m, n, q, r, s\},\ B = \{m, n, o, s, t, u, v\} \text{ e}$$
$$C = \{a, i, j, k, l, m, n, o\},$$

sendo assim:

a) V.

b) F, pois $B = \{m, n, o, s, t, u, v\}$.

c) V.

d) V.

e) F, apenas dois elementos têm essa característica, isto é,
$$|A - (B \cup C)| = |\{r, q\}| = 2$$

f) V.

g) V.

h) V.

i) F, pois o número de subconjuntos de A é igual a $2^{|A|}$, ou seja, 2^5 subconjuntos.

j) V.

k) F, porque
$$|(A \cup B) - C| = |\{q, r, s, t, u, v\}| = 6.$$

l) V.

m) V.

n) V.

2. Sendo A o conjunto dos amigos de Ana e B os de Bruno temos:

a) Este item pede a quantidade de amigos exclusivamente de Ana, simbolicamente representado por $|A - B| = 6$.

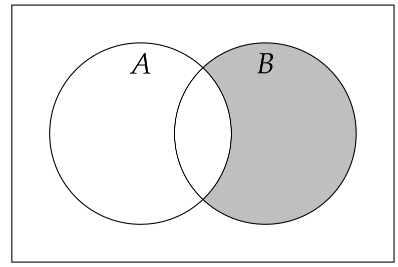
b) Este item pede a quantidade de amigos exclusivamente de Bruno, simbolicamente representado por $|B - A| = 9$.

c) Este item pede a quantidade de amigos de ambos, simbolicamente representado por $|A \cap B| = 5$.

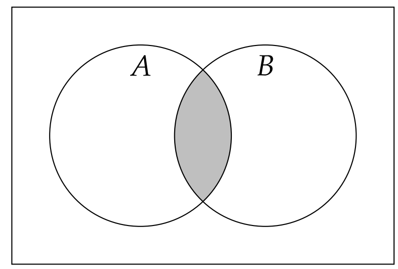
d) Oo total de presentes, incluindo os aniversariantes, é
$$|U| = 6 + 9 + 5 + 4 + 2 = 26 \text{ pessoas.}$$

3. Ficaremos com:

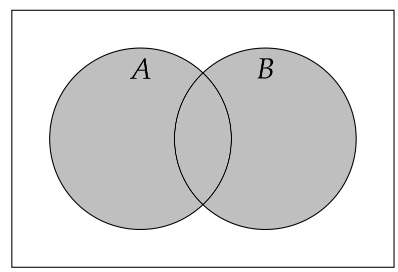
a)



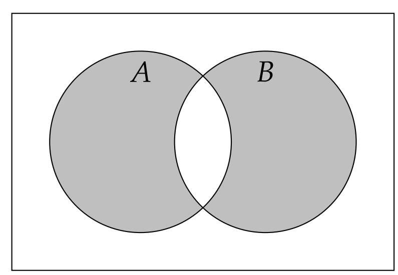
b)



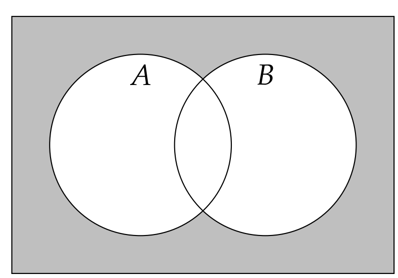
c)



d)



e)



4. Comecemos pela distribuição dos dados do enunciado, a partir da interseção entre os três conjuntos.

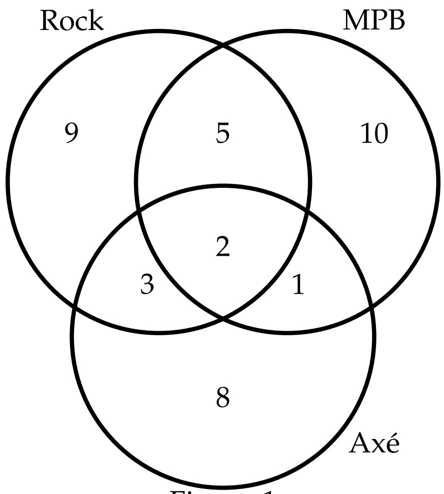


Figura 1

Os dados do enunciado geram o diagrama da figura 1 e assim:

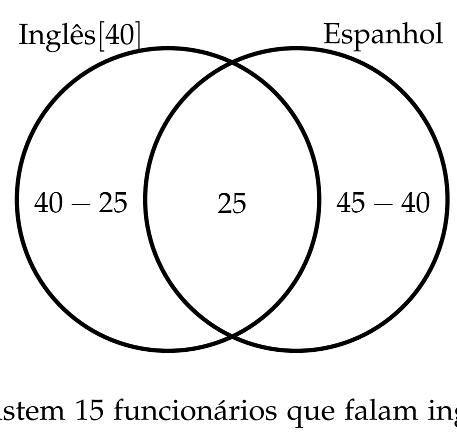
a) $\dfrac{8}{38} = \dfrac{4}{19}$; e

b) $\dfrac{20}{38} = \dfrac{10}{19}$ ou faríamos $1 - \dfrac{18}{38} = \dfrac{20}{38}$.

5. (Adaptado de concurso da FCI(SP)$-$ 2014**)**
Sendo I, o conjuntos dos que falam inglês, E o conjunto dos que falam espanhol, temos $I \cap E$ para aqueles que falam as duas línguas. Assim, escrevendo $|I| = |I - E| + |I \cap E|$, então $|I - E| = 15$. Agora, perceba que

$$|U| = |I| + |E - I|,$$

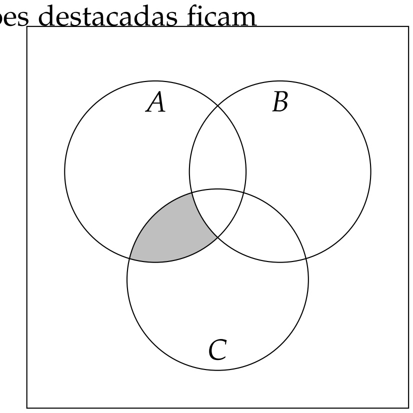
portanto $|E - I| = 5$.



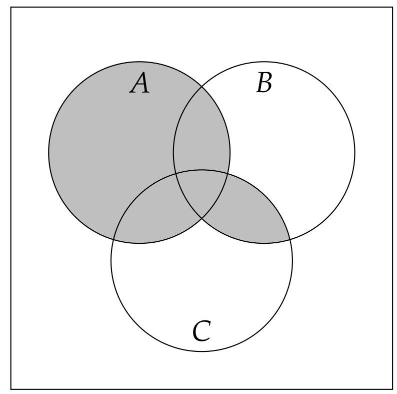
Como existem 15 funcionários que falam inglês e não falam espanhol, então a probabilidade procurada será igual a $\dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$. Além disso, são 5 que falam apenas espanhol.

6. As regiões destacadas ficam

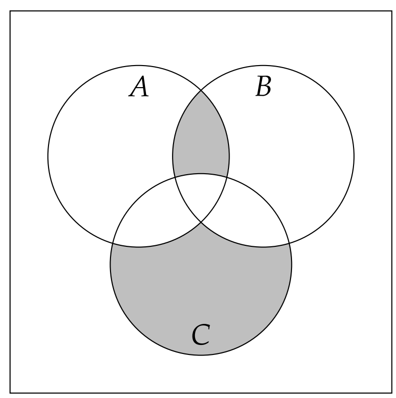
a)



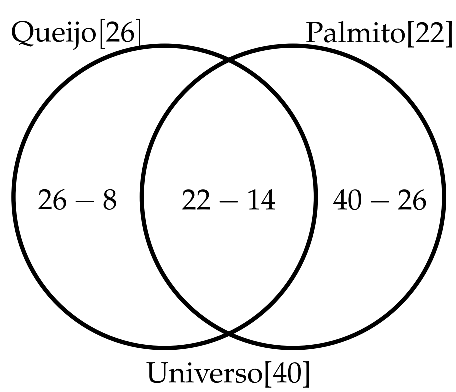
b)



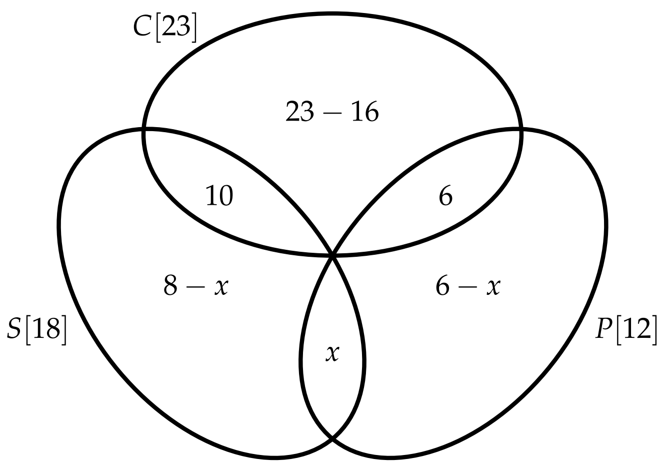
c)



7. (Extraído do vestibular da UFSCar(SP) $-$ 2013**)**
Como são 26 com queijo, há $40 - 26 = 14$ com apenas palmito. Daí, temos $20 - 14 = 6$ com palmito e queijo. Além disso, $26 - 8 = 18$ têm só queijo. Então a probabilidade pedida é de $\dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20}$.



8. (Adaptado da OBMEP)
Cada conjunto é definido pela inicial dos instrumentos .



Os dados do enunciado estão no diagrama da figura anterior. Como o número de pessoas que tocam certo instrumento é sempre um inteiro não negativo, devemos ter $x \leq 6$. Como $|C \cup S|$ é 31, para minimizarmos o número de componentes, basta encontrarmos o valor mínimo de $|P - (C \cup S)| = 6 - x$, que é 0 para $x = 6$. Assim, o número mínimo é

$$
\begin{aligned}
|U| &= |C| + |(S \cup P) - C| \\
|U| &= 23 + 8 - 6 + 6 + 6 - 6 \\
|U| &= 31.
\end{aligned}
$$

9. (Adaptado do vestibular da EFEI (MG))
Perceba que todos os carros chegam a C. A variação está nos caminhos que podem ser feitos, ou seja, passar ou apenas por A, ou só por B ou por A e B. Sendo assim, podemos retirar as informações do texto e montar um diagrama (figura 3) com dois conjuntos entrelaçados, a saber: o conjunto A dos carros que passam pela cidade A e o conjunto B dos carros que passam pela cidade B. Concluímos então que:

- $|A| = 25$;
- $|B| = 28$;
- $|A \cap B| = 17$;
- $|A - B| = 8$;
- $|B - A| = 11$; e.

$n = |A \cup B| = 8 + 17 + 11 = 36$ carros.

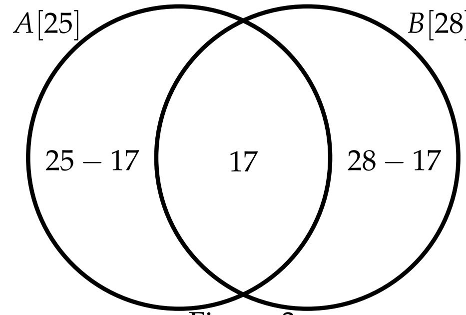


Figura 3

10. Uma solução: Podemos definir que em U temos o conjunto H dos homens, o conjunto $U - H$ das mulheres e o conjunto X das pessoas que jogam xadrez.

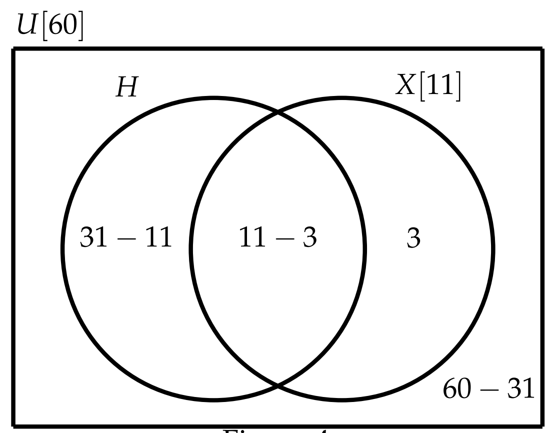


Figura 4

Por fim, temos $|H - X| = 20$, $|H \cap X| = 8$ e $|(U - H) - X| = 29$.

Outra Solução: Podemos definir que em U temos os conjuntos disjuntos H dos homens e M das mulheres. Além disso, há o conjunto X das pessoas que jogam xadrez.

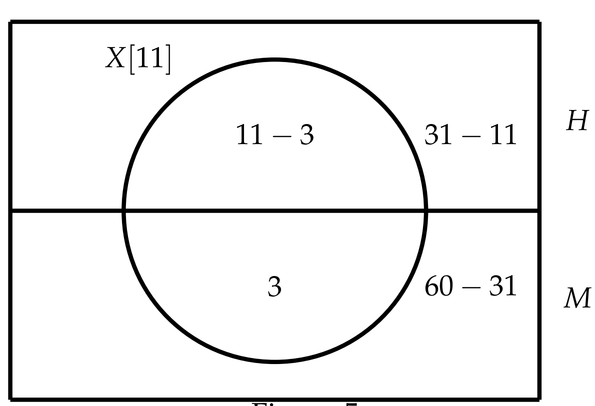


Figura 5

E também temos $|H - X| = 20$, $|H \cap X| = 8$ e $|(U - H) - X| = 29$.

11. (Extraído do Olimpíada da Hungria – Eureka 4)
Vamos tentar dividir 1, 2, 3, 4, 5, em dois conjuntos tais que nenhum deles contém a diferença de dois de seus elementos. O 2 não pode estar no mesmo conjunto que o 1 ou o 4 porque $2-1=1$ e $4-2=2$. Portanto, vamos colocar o 2 em um conjunto e o 1 e o 4 no outro. O 3 não pode ficar no segundo conjunto porque $4-3=1$. Logo, o 3 deve ficar no primeiro conjunto, junto com o 2. Agora, o 5 não pode ficar no primeiro conjunto porque $5-3=2$, e nem pode ficar no segundo porque $5-4=1$. A divisão proposta é portanto impossível.

12. (Adaptado do AIME)
No conjunto $\{1,2,3,\ldots,90\}$ obtém-se a menor soma

$$S_{\text{menor}} = 1+2+\ldots+90 = \frac{(1+90)\cdot 90}{2} = 4095$$

e a maior é obtida de $\{11,12,13,\ldots,100\}$, sendo igual a

$$S_{\text{maior}} = 11+12+\ldots+100 = \frac{(11+100)\cdot 90}{2} = 4995.$$

Todas as somas de 4095 a 4995 são possíveis de serem obtidas. Para ver isso, comecendo com a menor soma possível, basta trocar a maior parcela que possui sucessor em X e que ainda não apareceu na soma pelo seu sucessor. Isso irá incrementar a soma em uma unidade. Por exemplo, se após a realização dessa operação foi obtida a soma

$$1+2+3+\ldots+87+88+99+100,$$

basta trocar 88 por 90 para uma soma uma unidade maior. Assim, existem $4995-4095+1=901$ somas possíveis.

13. (Extraído do vestibular da UFU (MG))
Primeiro, é possível que tenha havido algum dia inteiro sem aula. Sendo assim, podemos montar um diagrama com dois conjuntos entrelaçados. O conjunto T representando as tarde sem aula, o M as manhãs sem aula e a interseção $(T \cap M)$ como os dias sem aula, e como não sabemos se houve dias assim, teremos que $|T \cap M| = x$.

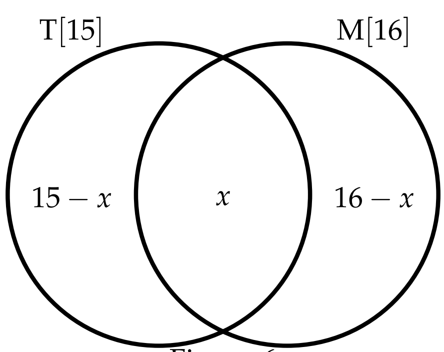


Figura 6

Portanto, $T-M$ representa os dias com aula ***só*** pela manhã e $M-T$ os dias com aula ***só*** pela tarde. Daí, construímos o diagrama da figura 6, no qual houve $15-x$ manhãs com aula e $16-x$ tardes com aula, totalizando 21 horas de curso, então $15-x+16-x=21$ com $x=5$ dias sem aula. O total de dias será igual a $21+5=26$.

14. (Adaptado do AIME)
De início, perceba que um número positivo ascendente (NPA) nunca pode ter zero em sua composição, afinal a posição do zero deveria ser na ordem mais à esquerda, o que não convém. Assim, para qualquer subconjunto não-nulo e não-unitário de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ há apenas uma posição para formar um NPA. Daí, finalizamos com 2^9 subconjuntos possíveis, excluindo o vazio e os nove subconjuntos unitários que não são condizentes com as condições do enunciado, o que totaliza

$$512-9-1=502.$$

15. (Extraído do AIME)
Chamemos de P o número de presentes em cada conferência, x, y, t e z serão os números inteiros dos que foram às três conferências; para às 1^a e 2^a, apenas; 1^a e 3^a, apenas; e 2^a e 3^a, apenas, respectivamente.

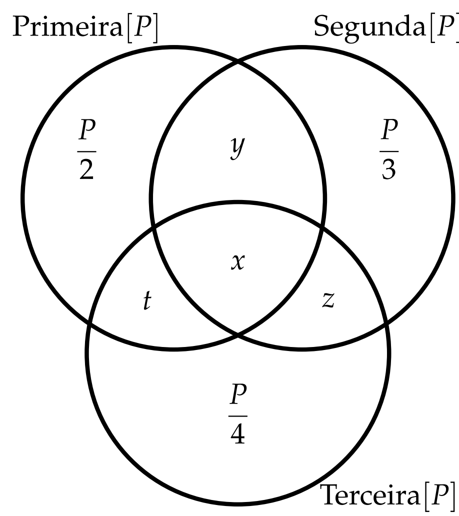


Figura 7

Podemos então escrever que

- $y = 300 - \left(P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3}\right) = 300 - \frac{11P}{6};$
- $z = 300 - \left(P + \frac{P}{3} + \frac{P}{4}\right) = 300 - \frac{19P}{12};$
- $t = 300 - \left(P + \frac{P}{2} + \frac{P}{4}\right) = 300 - \frac{7P}{4};$

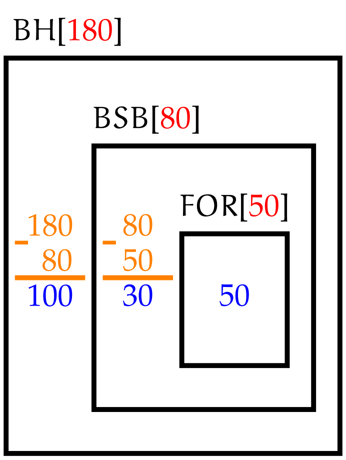
e ainda $x = \frac{P}{2} - (y+t) = \frac{49P}{12} - 600$. Temos então que P é múltiplo de 12. Daí existe k inteiro tal que $P = 12k$.

Assim, ficamos com $y = 300 - 22k$, $z = 300 - 19k$, $t = 300 - 21k$ e $x = 49k - 600$, todos não negativos, logo:

- $y = 300 - 22k \geq 0 \Rightarrow k \leq 13,63$,
- $z = 300 - 19k \geq 0 \Rightarrow k \leq 15,78$,
- $t = 300 - 21k \geq 0 \Rightarrow k \leq 14,28$ e
- $x = 49k - 600 \geq 0 \Rightarrow k \geq 12,24$.

O único inteiro nesse intervalo é $k = 13$, com $P = 156$ e $x = 37$.

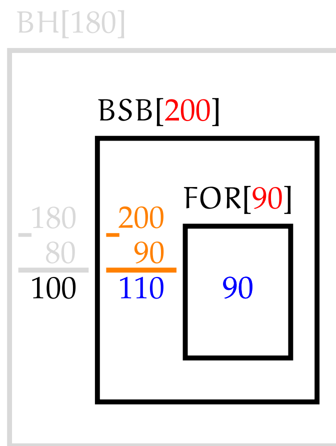
16. (Adaptado do vestibular do IBMEC (SP) – 2015**)**
De início, perceba que nos trechos 1, 2 e 3, todos vão ter que passar por Belo Horizonte (BH), mas desses, oitenta seguirão para Brasília (BSB) ou Fortaleza (FOR), logo deveremos ter 100 que ficarão em BH e os demais seguirão viagem. Além disso, dos 80 de BSB há cinquenta que seguirão para FOR, assim temos que 30 ficarão em BSB.



Observe o diagrama acima e os cálculos abaixo para acompanhar o raciocínio textual anterior.

$$\begin{aligned} FOR &= 50 \\ BSB &= 80 - 50 = 30 \\ BH &= 180 - 80 = 100. \end{aligned}$$

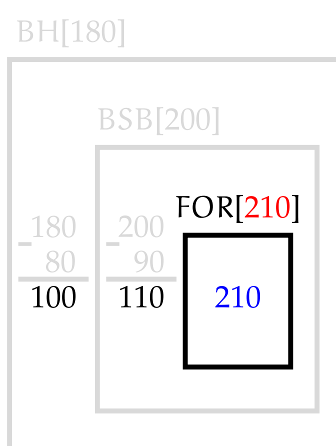
Agora, analisando os trechos 4 e 5, todos que sairão de BH passarão por BSB, lembrando que 100 já saíram e 80 seguem na aeronave, de modo que dos 200 que viajarão temos 110 para Brasília (oitenta novos) e 90 para Fortaleza (quarenta novos).



Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} FOR &= 50 + 40 = 90 \\ BSB &= 80 + 30 = 110 \\ BH &= 100. \end{aligned}$$

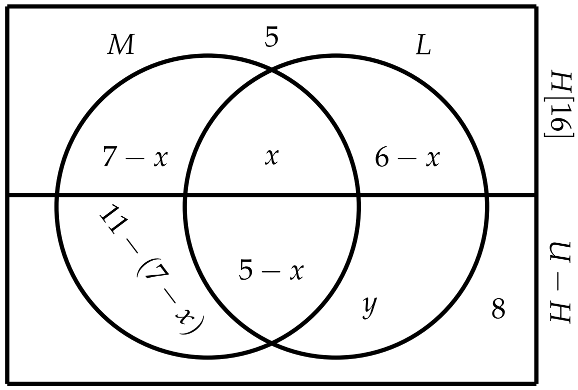
Por fim, para o trecho 6, os 90 que saíram de BSB se juntarão a mais 120 novos passageiros para que 210 finalizem a viagem, como 100 haviam ficado em Belo Horizonte, e 110 em Brasília, com os 210 de Fortaleza são 420 que voaram.



Daí, terminamos com

$$\begin{aligned} FOR &= 90 + 120 = 210 \\ BSB &= 110 \\ BH &= 100. \\ Total &= 100 + 110 + 210 = 420. \end{aligned}$$

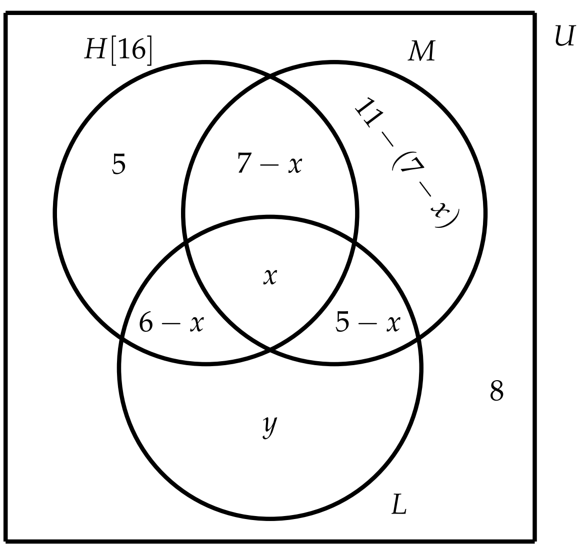
17. (Extraído da Olimpíada do Peru)
Uma Solução:
Em U há os conjuntos disjuntos H dos homens e $U - H$ das mulheres.



Além disso, há os conjuntos M e L das pessoas que gostam de Matemática e Literatura. Assim

$$\begin{aligned} |H| + |U - H| &= 35 \\ 16 + 4 + x + 5 - x + y + 8 &= 35 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Outra Solução:
Em U temos os conjuntos H dos homens e $U - H$ das mulheres. Além disso, há os conjuntos M e L das pessoas que gostam de Matemática e Literatura.



Observe que

$$\begin{aligned} 5 + 7 - x + x + 6 - x &= 16 \\ x &= 2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 16 + 4 + x + 5 - x + y + 8 &= 35 \\ 16 + 4 + 2 + 5 - 2 + y + 8 &= 35 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com