

Material Teórico - Módulo de CONJUNTOS

Conjuntos Numéricos - Parte 01

9o Ano

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

14 de dezembro de 2019



1 Introdução

No módulo anterior, aprendemos a utilizar a teoria dos conjuntos para lidar com conjuntos no sentido amplo. Agora, iremos centrar nossa atenção no estudo dos **conjuntos numéricos**, os quais são basicamente conjuntos formados por “números”.

Conforme veremos ao longo deste módulo, a própria noção de “número” não foi sempre a mesma. Ao contrário, ela foi evoluindo através da história da humanidade à medida que situações novas (abstratas ou motivadas pela observação de eventos naturais) provocavam uma nova compreensão sobre os números e suas operações.

2 Números naturais

Os números naturais foram os primeiros a serem empregados pelos mais diversos povos antigos. Seu uso principal era relacionado à enumeração de objetos: dias até a colheita, membros em uma comunidade, animais utilizados na pecuária. Evidentemente, os antigos mais verbalizavam os números que os escreviam, e tampouco dispunham da simbologia que utilizamos hoje em dia. Modernamente, o conjunto dos naturais é representado pelo símbolo \mathbb{N} e declaramos seus elementos escrevendo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

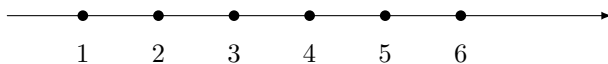
A representação dos números utilizando os símbolos 1, 2, ..., 9, 0 (conhecidos como algarismos) é conhecida como sistema **indo-arábico**. Esse sistema, que é hoje utilizado em todo o mundo, não foi o primeiro a ser desenvolvido. Os Egípcios, os Romanos e os Maias são exemplos de alguns povos que desenvolveram seus próprios sistemas para representar os números inteiros. Porém, esses sistemas caíram em desuso por sua pouca praticidade para efetuar cálculos.

A grande vantagem do sistema **indo-arábico** se dá através da utilização da **base decimal**. Nessa base, os números são representados como somas de potências de 10 multiplicadas por algarismos. Por exemplo, o número 4058 pode ser escrito como

$$4058 = 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

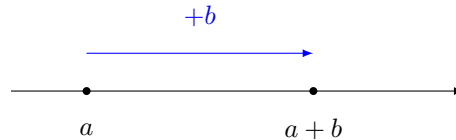
Operações com naturais

Além de utilizarmos a notação decimal, podemos representar os números naturais por meio de pontos equidistantes marcados ao longo uma semirreta, como mostrado a seguir:



A reta correspondente é conhecida como a **reta numérica**.

O primeiro ponto da esquerda representa o número 1, o segundo representa o número 2 e assim sucessivamente. Mediante essa nova forma de compreender os números naturais, a adição de um número b a um número a pode ser entendida como um deslocamento de b passos para a direita a partir do ponto a . Essa compreensão de que os números podem ser posicionados em uma reta facilita o entendimento dos conceitos de *maior que* e *menor que*. De fato, escrevemos $a < b$ (leia *a menor do que b*) sempre que a estiver representado à esquerda de b na reta numérica.



A partir dessa interpretação visual da adição, também podemos compreender duas propriedades muito importantes relacionadas a essa operação:

I. **Comutatividade:** Se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a + b = b + a$.

II. **Associatividade:** Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Essas propriedades nos dizem que a ordem em que realizamos somas em sequência não altera o resultado final. Podemos empregar a propriedade da associatividade para efetuar contas de maneira mais eficiente. Vejamos um

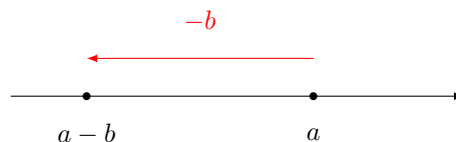
Exemplo 1. Para calcular a soma

$$1997 + 1998 + 2002 + 2003,$$

percebemos que $1997 + 2003 = 4000$ e $1998 + 2002 = 4000$. Logo, rearranjando as parcelas, calculamos

$$\begin{aligned} 1997 + 1998 + 2002 + 2003 &= \\ &= (1997 + 2003) + (1998 + 2002) \\ &= 4000 + 4000 \\ &= 8000. \end{aligned}$$

Também podemos utilizar a interpretação geométrica para compreender a operação inversa da adição (a **subtração**) através do seguinte raciocínio: Se a operação de adição ($a, b \mapsto a + b$) pode ser entendida como caminhar b passos para a direita a partir do ponto a , a **operação inversa** de subtração ($a, b \mapsto a - b$) pode ser entendida como caminhar b passos para a esquerda a partir do ponto a .

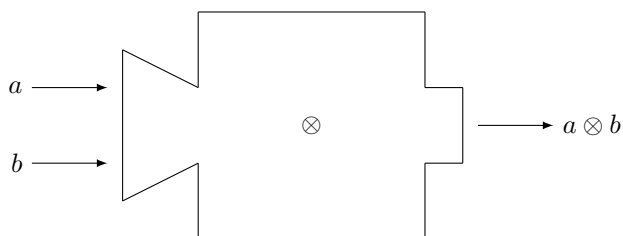


Porém, o raciocínio anterior tem uma falha: Veja que, se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a + b \in \mathbb{N}$. Contudo, o mesmo não ocorre para a operação de subtração. De fato, se $b > a$, então $a - b$ não tem sentido nos naturais. Nesse caso, dizemos que a operação de adição é **fechada** no conjunto dos naturais, mas que a de subtração não o é. Para que a subtração seja uma operação fechada, devemos realizar uma expansão do conjunto dos naturais, utilizando o **conjunto dos números inteiros**.

O conjunto dos inteiros será nosso objeto de estudo na próxima seção. Por ora, terminamos esta seção apresentando uma definição formal do que vem a ser uma *operação fechada* em um conjunto.

Definição 2. *Seja M um conjunto não vazio e \otimes uma operação entre elementos de M . Dizemos que \otimes é fechada se $a \otimes b$ pertencer a M sempre que a e b forem elementos de M .*

Assim, você pode entender uma operação fechada em um conjunto M como uma “máquina” que transforma dois elementos de um conjunto M em um outro elemento de M .



3 Números inteiros

O conjunto dos números inteiros contém todos os números naturais, o número 0 e os números inteiros negativos (que são os inteiros que estão à esquerda do zero, na representação na reta numérica). Ele é representado pelo símbolo \mathbb{Z} e descrito sob a forma

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

(A notação \mathbb{Z} para os inteiros foi introduzida por matemáticos alemães e deve-se ao fato de que, em alemão, *Zahl* é o mesmo que *número*.)

Além da adição e da subtração, também podemos definir a multiplicação entre inteiros.

Definição 3. *Sejam a e b números inteiros.*

(i) *Se $a > 0$, então*

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{a \text{ parcelas}}$$

(ii) *Se $a < 0$, então*

$$a \times b = \underbrace{(-b) + (-b) + (-b) + \dots + (-b)}_{-a \text{ parcelas}}$$

(iii) *Se $a = 0$, então $a \times b = 0$.*

A operação de multiplicação também possui as propriedades de comutatividade e associatividade, as quais são simbolizadas por

$$a \times b = b \times a \text{ e } a \times (b \times c) = (a \times b) \times c,$$

respectivamente.

Por vezes, as propriedades da multiplicação e da adição nos permitem fazer determinados tipos de cálculos de forma mais rápida. Vejamos alguns exemplos nesse sentido:

Exemplo 4. *Para calcular o valor da soma*

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100,$$

podemos mudar a ordem das parcelas, adicionando os termos equidistantes das extremidades da soma original. Mais precisamente, observando que $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, ..., $50 + 51 = 101$, calculamos a soma desejada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 &= \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\ &= \underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{50 \text{ parcelas}} \\ &= 50 \times 101 = 5050. \end{aligned}$$

Exemplo 5. *Para calcular o valor de $16 \times 73 \times 125$, fazemos*

$$\begin{aligned} 16 \times 73 \times 125 &= 2 \times 8 \times 125 \times 73 \\ &= 2 \times 1000 \times 73 \\ &= 2 \times 73 \times 1000 \\ &= 146 \times 1000 \\ &= 146000. \end{aligned}$$

A multiplicação de um número finito de fatores iguais recebe notação e nomenclatura especiais.

Definição 6. *Dados números inteiros a e m com $m > 0$, definimos a **potência de base a e expoente m** por*

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ fatores } a}.$$

Se $a \neq 0$, definimos ainda $a^0 = 1$. (As razões para essa definição aparentemente estranha ficarão claras na discussão que sucede a Proposição 7.)

Por exemplo, a multiplicação $3 \times 3 \times 3 \times 3$ pode ser escrita de forma abreviada como 3^4 . Agora, observe que podemos usar a propriedade associativa para obter:

$$\begin{aligned} 3^4 \times 3^2 &= (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 3^{4+2} = 3^6. \end{aligned}$$

Aqui é desejável que os alunos compreendam que o argumento utilizado no exemplo acima é geral, e evidencia uma importante propriedade das potências: para transformar um produto de potências de mesma base em uma só potência, basta repetir a base e somar os expoentes. Mais geralmente, temos a seguinte

Proposição 7. *Sejam a , m e n inteiros, com m e n positivos. Então $a^m \times a^n = a^{m+n}$.*

Também podemos escrever a igualdade acima como

$$\frac{a^{m+n}}{a^n} = a^m.$$

Então, fazendo $m+n = p$, temos $m = p-n$, de forma que a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}, \quad (1)$$

sempre que $p > n$ (pois, na proposição anterior, m e n foram supostos positivos, de forma que $p = m+n > n$). Para que (1) valha para inteiros positivos $p \geq n$ é que definimos a^0 como sendo igual a 1. Realmente, sendo esse o caso, temos

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{n-n}.$$

Utilizando a propriedade expressa na Proposição 7, podemos escrever

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \\ &= 2^{3+3+3+3} \\ &= 2^{3 \times 4} = 2^{12}. \end{aligned}$$

Mais uma vez, os cálculos acima evidenciam uma importante propriedade geral de potências: quando temos uma potência de uma potência, repetimos a base e multiplicamos os expoentes. Mais precisamente:

Proposição 8. *Sejam a , m e n inteiros, com m e n positivos. Então: $(a^m)^n = a^{m \times n}$.*

Observação 9. *O leitor deve ter bastante cuidado ao utilizar a propriedade de potências dada pela proposição anterior. Isso porque, quando escrevemos $(a^m)^n$, os símbolos dizem que temos a potência de expoente n de a^m . Por outro lado, quando escrevemos $a^{(m^n)}$, os símbolos se referem à potência de expoente m^n de a , para piorar as coisas, em geral escrevemos simplesmente a^{m^n} , em vez de $a^{(m^n)}$.*

Assim é que $(2^3)^4 = 2^{12}$, mas

$$2^{(3^4)} = 2^{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 2^{81}.$$

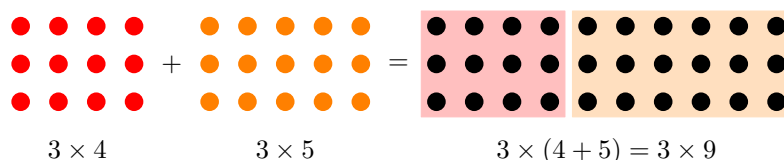
Quando realizamos uma operação de adição para, em seguida, efetuar uma operação de multiplicação, podemos simplificar nossa tarefa utilizando uma propriedade denominada *distributividade da multiplicação em relação*

à adição.

Distributividade: Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

A distributividade pode ser compreendida visualmente com o auxílio de uma configuração reticulada de pontos. Veja o exemplo para o caso $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$, mostrado na figura a seguir:



A propriedade distributiva é muito útil para operarmos com produtos notáveis. Por exemplo (e omitindo o símbolo \times , como de costume):

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b)a + (a + b)b \\ &= (a^2 + ba) + (ab + b^2) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, observando que a multiplicação também se distribui em relação à subtração, isto é, que

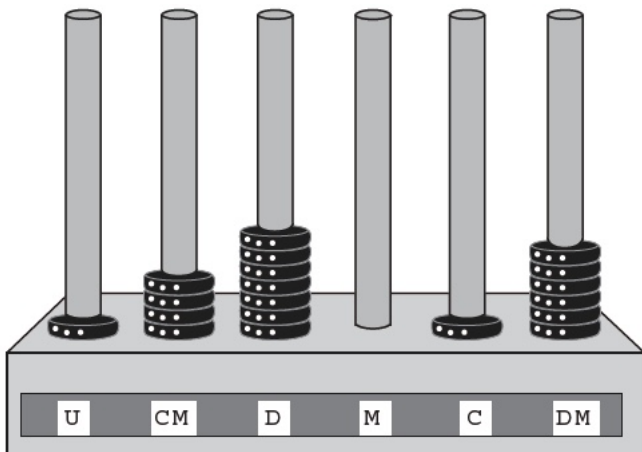
$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c,$$

temos

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b \\ &= (a^2 + ba) - (ab + b^2) \\ &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Exercício 10 (ENEM 2016). *O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base 10 para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM, que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.*

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.



Nessa disposição, o número que está representado na figura é

- (a) 46171.
- (b) 147016.
- (c) 171064.
- (d) 460171.
- (e) 610741.

Solução. A seguir, mostramos a correspondência usual: $U \rightarrow 1$; $D \rightarrow 7$; $C \rightarrow 1$; $M \rightarrow 0$; $DM \rightarrow 6$; $CM \rightarrow 4$. Portanto, o número representado no ábaco da figura é 460171, o que corresponde ao item (d).

□

4 Sugestões ao professor

Muitos professores tendem a ensinar os conjuntos numéricos de maneira apressada, tendo como pressuposto a ideia de que os alunos já aprenderam sobre os números e suas operações em anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém, gostaríamos de alertar que esta visão não é a mais adequada, e muitos alunos (senão a maioria deles) chegam ao Ensino Médio com graves deficiências quanto a cálculos aritméticos simples, como os apresentados aqui. Dessa forma, sempre que possível, é interessante o professor dedicar algum tempo a revisar com seus alunos as operações em conjuntos numéricos.