Material Teórico - Círculo Trigonométrico

Radiano, Círculo Trigonométrico e Congruência de arcos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

22 de setembro de 2018

1 Arcos e ângulos

Dado um círculo e dois pontos (distintos) A e B sobre ele, um conjunto de pontos sobre o círculo que forma a curva que vai de um dos pontos ao outro é chamado de **arco**. Veja que dois pontos sobre o círculo determinam dois arcos: pensando sempre no sentido anti-horário, temos um arco que vai de A até B e outro que vai de B até A. Quando o segmento AB é um diâmetro do círculo, AB é um *eixo de simetria* e, portanto, divide o círculo em dois pedaços congruentes (chamados *semicírculos*); neste caso, os dois arcos possuem o mesmo comprimento. Mas, quando AB não é diâmetro, esses dois arcos possuem comprimentos diferentes, então um deles (o de maior comprimento) é o chamado **arco maior** e o outro (o de menor comprimento) é o **arco menor**. Todo arco $\overparen{AB}$ determina um ângulo central, que é o ângulo $\angle AOB$ que o contém, onde O é o centro do círculo.

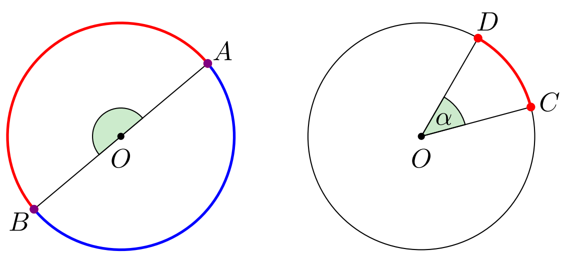


Figura 1: arcos $\overparen{AB}$ e $\overparen{CD}$ (em vermelho) e seus ângulos centrais.

Como podemos calcular o comprimento de um arco em um círculo? Lembre-se de que o comprimento de um *círculo* de raio r, onde r é qualquer número real positivo, é igual $2\pi r$ (isso vem da definição de π, que é a razão entre o comprimento do círculo pelo diâmetro); por outro lado, temos que o comprimento de um arco é proporcional à medida de seu ângulo central. Assim, lembrando que a medida (em graus) de uma volta completa no círculo é $360°$ e denotando por α (também em graus) a medida do ângulo central correspondente ao arco, concluímos que o comprimento desse arco é

$$C_{\text{arco}} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}. \tag{1}$$

Ao usar a unidade de medida "graus" nós partimos o círculo em 360 arcos de mesmo comprimento. O ângulo de $1°$ (um grau) é o ângulo central de qualquer um desses arcos. Mas porque 360 pedaços? Isso é uma herança da antiga civilização babilônica, que também nos legou horas, minutos e segundos como unidades de medida de tempo (veja que uma hora possui 60 minutos ou $60 \cdot 60 = 360$ segundos). Uma das vantagens do número 360 é que ele possui muitos divisores inteiros. Por exemplo, podemos dividir 360 objetos em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ou 12 grupos de mesmo tamanho, sempre obtendo uma quantidade inteira de objetos em cada grupo. Isso torna o uso da medida "graus" muito prática para o dia a dia. Além disso, aprendemos isso tão jovens que esse sistema torna-se habitual e instintivo. Por exemplo: surfistas e skatistas falam da manobra 360 para indicar uma rotação completa e quando alguém diz que vai dar um 180 nos negócios, entendemos que ela vai mudar os planos e passar a andar na direção oposta a que vinha.

Contudo, o número 360 é completamente arbitrário. Porque não dividir o círculos em 400 partes no lugar de 360? Na verdade, existe uma unidade de medida de ângulos que faz justamente isso. Ela é chamada de *grado* e já foi muito usada na navegação[1], mas caiu em desuso. E porque não dividir o círculos em 100 partes iguais, de forma que pudéssemos pensar em cada ângulo como um certo percentual de uma volta completa?

Acontece que, ao estudar Trigonometria e boa parte das matérias de cursos universitários em Matemática, o uso do "grau" como unidade de ângulo não é conveniente. Há outra unidade de medida de ângulos, que chama-se *radiano*. Ela é definida de uma maneira mais fundamental e não depende da escolha de um número arbitrário de pedaços.

> Um **radiano** é a medida do ângulo central de um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo (ao qual o arco pertence). Abreviamos 1 radiano para 1 rad.

Pelo exposto acima, quando $\alpha = 1\,\text{rad}$, temos que $C_{\text{arco}} = r$. Logo,

$$2\pi \cancel{r} \cdot \frac{\alpha}{360°} = \cancel{r} \implies 1\,\text{rad} = \frac{360°}{2\pi} \cong 57°, \tag{2}$$

ou seja, 1 radiano vale *aproximadamente* 57 graus. A Figura 2 mostra como obter um ângulo de 1 radiano[2].

Da equação (2) acima, também obtemos a importante relação:

$$2\pi\,\text{rad} = 360°. \tag{3}$$

Equivalentemente, dividindo ambos os lados por 2, obtemos $\pi\,\text{rad} = 180°$. De modo geral, para qualquer valor em radianos, basta multiplicar esse valor por $180/\pi$ para obter o valor em graus. De modo semelhante, para fazer a conversão de graus para radianos devemos multiplicar a medida do arco (dada em graus) por $\pi/180$.

Ao estudar funções trigonométricas (como seno, cosseno e tangente), usualmente assumimos que o ângulo é dado

[1] O motivo é que navegar um grado sobre um meridiano terrestre corresponde a navegar aproximadamente 100 km. Contudo, como a Terra não é uma esfera perfeita, essa aproximação não é tão boa e, hoje em dia, há instrumentos de navegação bem mais precisos.

[2] A esse respeito, veja a animação encontrada no endereço *https://tex.stackexchange.com/questions/443298/how-do-i-bend-a-line-onto-a-circle*.

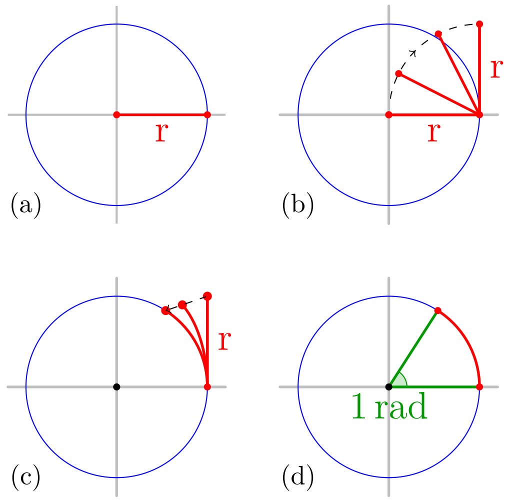


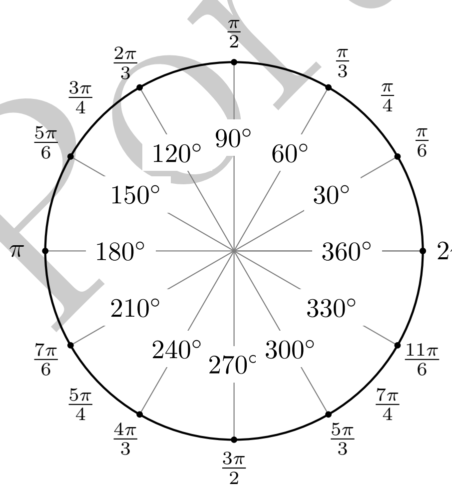
Figura 2: construção de um ângulo de 1 radiano. Todos os segmentos vermelhos possuem o mesmo comprimento: (a) um círculo de raio r; (b) rotação de um raio; (c) entortando o raio sobre o círculo; (d) marcando o ângulo central de 1 rad.

em radianos. É interessante observar que a maioria das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão (algumas conseguem trabalhar com graus ou grados, mas é preciso mudar o modo de operação). Nesta aula, usaremos as duas medidas (graus e radianos) para nos acostumarmos à transição entre uma e outra.

Para facilitar, listamos abaixo os valores de alguns ângulos comuns em graus e em radianos.

$$2\pi\,\text{rad} = 360^\circ, \qquad \pi\,\text{rad} = 180^\circ, \qquad \frac{\pi}{2}\,\text{rad} = 90^\circ,$$
$$\frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60^\circ, \qquad \frac{\pi}{4}\,\text{rad} = 45^\circ, \qquad \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30^\circ.$$

A equivalência entre medidas em graus e radianos de alguns outros ângulos comuns pode ser vistas na figura seguinte:



A figura acima serve apenas para consulta rápida ou para conferir suas respostas. De outra forma, seu intuito não é nos fazer memorizar todos esse valores, uma vez que a conversão entre graus e radianos pode ser feita facilmente, como nos exemplos seguintes.

Exemplo 1. *Transforme as medidas dos ângulos a seguir, de graus para radianos:*

(a) 150°.

(b) 240°.

Solução 1.
(a) Seja x a medida do ângulo em radianos que equivale a 150°. Como π radianos equivalem a 180° e essas medidas são proporcionais, temos que:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{150^\circ}{180^\circ} \implies x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

(b) Seja y a medida do ângulo em radianos que equivale a 240 graus. De forma semelhante ao item anterior, temos que

$$\frac{y}{\pi} = \frac{240^\circ}{180^\circ} \implies y = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}.$$

Veja que esses valores são realmente os indicados na figura anterior. □

Solução 2. Conforme havíamos comentado, para realizar a conversão de graus para radianos basta multiplicar por $\pi/180$. Assim, o ângulo que corresponde a 150 graus é

$$150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad},$$

ao passo que o ângulo que corresponde a 240 graus é

$$240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}\,\text{rad}.$$

□

Exemplo 2. *Transforme as medidas dos ângulos seguintes, de radianos para graus:*

(a) $3\pi/2\,\text{rad}$.

(b) $2\pi/3\,\text{rad}$.

(c) $3\,\text{rad}$.

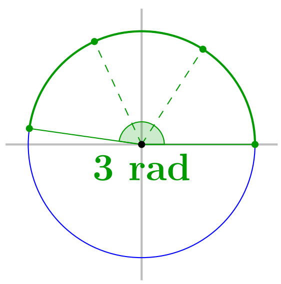
(d) $\pi^2/4\,\text{rad}$.

Solução. Para converter de radianos para graus, devemos multiplicar a medida em radianos por $180/\pi$. Assim fazendo, temos que:
(a)
$$\frac{3\pi}{2}\,\text{rad} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ.$$
(b)
$$\frac{2\pi}{3}\,\text{rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ.$$

Observação: nos dois itens acima, para fins práticos poderíamos simplesmente substituir π rad por $180°$. Mas, cuidado, pois isso só é válido quando o valor do ângulo em radianos é um número real multiplicado por π. Nos dois itens seguintes, não há como apenas substituir π por $180°$.

(c) A figura a seguir mostra um ângulo de 3 radianos. Lembre-se de que $\pi \cong 3{,}14$, de forma que uma ângulo de 3 radianos é um pouco menor do que π radianos, ou seja, pouco menor do que $180°$. Mais precisante, ele mede:

$$3\,\text{rad} = 3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \cong 171{,}88°.$$



(d)

$$\frac{\pi^2}{4}\,\text{rad} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{180°\pi}{4} \cong 141{,}37°.$$

Observação: os valores dos dois últimos itens podem ser obtidos com o auxílio de uma calculadora. □

Uma das vantagens de se trabalhar com radianos é que a fórmula para o comprimento do arco torna-se mais simples, conforme explica o próximo

Exemplo 3. *Se $\widehat{AB}$ é um arco de um círculo de raio r, cujo ângulo central mede θ radianos, então o comprimento deste arco é*

$$C_{\text{arco}} = r\theta.$$

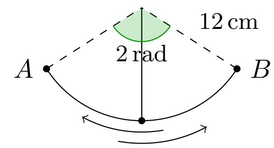
Prova. De fato, se o ângulo central mede θ radianos, temos que este ângulo mede $\theta \cdot \dfrac{360}{2\pi}$ graus. Substituindo α por esse valor na equação (1), obtemos

$$C_{\text{arco}} = 2\pi r \cdot \frac{\theta \cdot \frac{360}{2\pi}}{360} = r\theta.$$

□

A fórmula do enunciado do exemplo anterior também pode ser vista da seguinte maneira: para encontrar a medida (em radianos) do ângulo central de um arco de círculo, basta dividir o comprimento do arco pelo raio do círculo. O exemplo acima é apenas um, dentre muitos outros, em que usar radianos simplifica os cálculos.

Exemplo 4. *Observe o desenho a seguir. Ele representa o esquema de um pêndulo de um relógio "cuco". Qual o comprimento do arco $\widehat{AB}$.*



Solução. Como o ângulo está expresso em radiados e cada radiano nos dá um arco cujo comprimento é igual ao raio, concluímos que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é $2 \cdot 12 = 24$ cm. □

2 O círculo trigonométrico

O **círculo trigonométrico** é o círculo de raio 1 e centro na origem, (0,0), do plano cartesiano. É interessante observar que, usando a fórmula deduzida no Exemplo 3 com $r = 1$, concluímos que o comprimento de um arco desse círculo é *igual* à medida do seu ângulo central em radianos.

Os eixos do plano cartesiano dividem o círculo trigonométrico em quatro partes. Cada parte é chamada de *quadrante* e os quadrantes são numerados de I até IV (um a quatro em algarismos romanos), em sentido anti-horário, sendo que o primeiro quadrante é aquele formado pelos pontos em que as ambas coordenadas são positivas (veja a Figura 3).

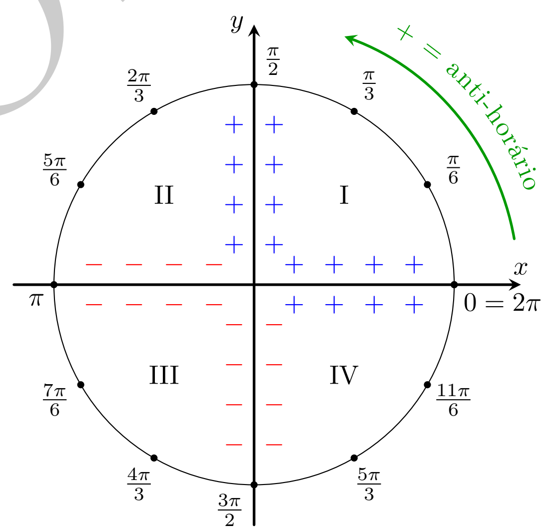


Figura 3: o círculo trigonométrico e alguns arcos positivos.

Observe que, cada quadrante determina exatamente se a abcissa e/ou a ordenada de todos os seus pontos são positivas ou negativas. De fato, nos quadrantes I e IV temos que a abcissa é positiva (pois estes quadrantes estão à direita do eixo-y e, portanto, seus pontos possuem coordenada x positiva); por outro lado, nos quadrantes II e III a abcissa de todo ponto é negativa. De forma semelhante, nos quadrantes I e II temos que a ordenada de cada ponto é positiva (pois os pontos do círculo situados nesses quadrantes estão acima do eixo-x, ou seja, na direção positiva do eixo-y), enquanto que nos quadrantes III e IV a ordenada é negativa.

Na verdade, não apenas os quadrantes são listados no sentido anti-horário. Conforme indicado na Figura 3, sempre iremos considerar o sentido anti-horário como o **sentido positivo**, ou seja, o sentido em que, caminhando sobre o círculo, medimos **arcos positivos**. Naturalmente, o sentido horário será considerado o **sentido negativo**, ou seja, o sentido em que, caminhando sobre o círculo, medimos **arcos negativos**.

Mais precisamente, observe inicialmente que, como todos os pontos do círculo estão à distância 1 do ponto $O = (0{,}0)$, temos que esse círculo intersecta o eixo-x no ponto $A = (1{,}0)$. Então, partindo de A e caminhando sobre o círculo no sentido anti-horário (positivo), marcamos os valores que aparecem da Figura 3 $(\pi/6, \pi/3, \pi/2, \ldots)$. Por outro lado, partindo de A e caminhando sobre o círculo no sentido horário (negativo), marcamos os valores que aparecem da Figura 4 $(-\pi/6, -\pi/3, -\pi/2, \ldots)$.

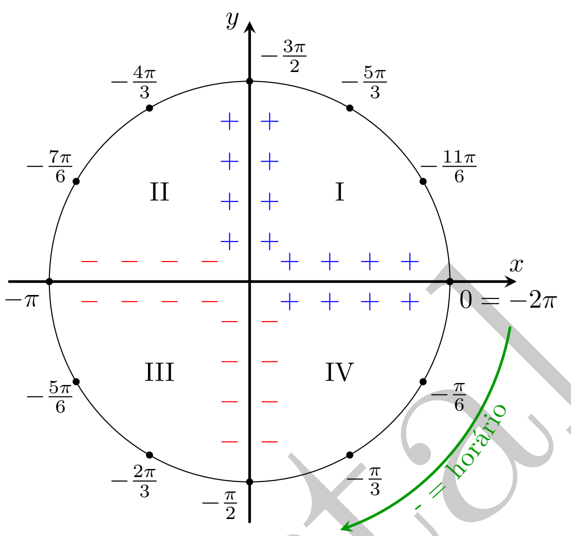


Figura 4: o círculo trigonométrico e alguns arcos negativos.

Como o comprimento do círculo trigonométrico é 2π, cada ponto P sobre ele determina um arco positivo $\widehat{AP}$ que possui ângulo central $\angle AOP$, seguindo de A a P no sentido anti-horário, de medida menor que 2π. Sempre que falarmos do arco e do ângulo associados a P, salvo menção explícita em contrário, estaremos nos referindo a $\widehat{AP}$ e $\angle AOP$, respectivamente. Por outro lado, se formos de A até P seguindo o círculo no sentido horário, temos um único arco negativo determinado por P, de medida maior que -2π.

Como observado anteriormente, o comprimento de $\widehat{AP}$ é igual à medida de $\angle AOP$ em radianos. Assim, os números indicados sobre o círculo da Figura 3 também representam ângulos. Um ponto crucial é que podemos obter o seno, cosseno e tangente desses ângulos usando o círculo trigonométrico, como veremos a seguir (Figura 5).

No módulo “Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente” do Nono Ano, já havíamos definido o que é o seno, cosseno e tangente de um ângulo entre $0°$ e $90°$, usando o triângulo retângulo. Traduzindo aquela definição para radianos, seja α um dos ângulos de um triângulo retângulo, de forma que, em radianos, $0 < \alpha < \pi/2$. Então, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$

A Figura 5, nos mostra um ponto P associado ao ângulo α (ou ao arco $\widehat{AP}$, o que é o mesmo). Como $0 < \alpha < \pi/2$, temos que P pertence ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Traçando a perpendicular de P ao eixo-x, obtemos um triângulo retângulo; como a hipotenusa deste triângulo é um raio, ela mede 1. Dessa forma, pela fórmula de $\cos\alpha$ acima, o valor de $\cos\alpha$ é igual ao comprimento do cateto adjacente a α. Note, pela figura, que este comprimento também é igual a abcissa do ponto P, ou seja, a coordenada x desse ponto. Analogamente, o valor de $\operatorname{sen}\alpha$ é igual à coordenada y de P. Ou seja,

$$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha).$$

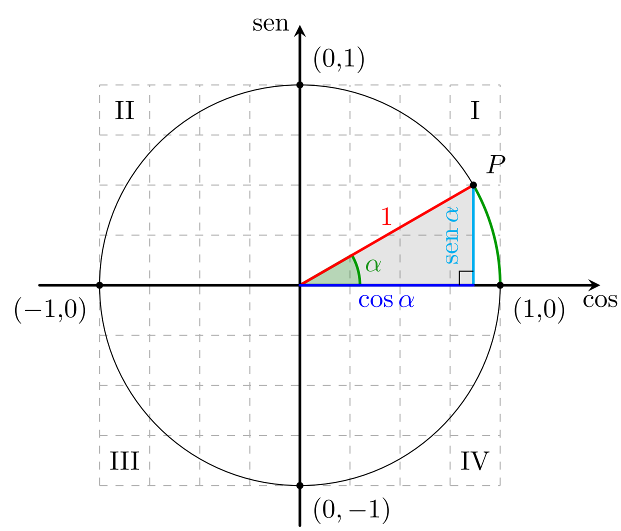


Figura 5: círculo e razões trigonométricas.

Por essa razão, renomeamos os eixos de nossa figura como o eixo dos cossenos (horizontal) e o eixo dos senos (vertical).

(Na próxima aula, veremos também como obter a tangente de α usando o círculo trigonométrico).

Veja que as definições de seno, cosseno e tangente com base no triângulo retângulo se aplicam apenas para ângulos (ou arcos) entre 0 e $\pi/2$ radianos. Dado um arco α fora deste intervalo, define-se o seno e o cosseno de α estendendo o que fizemos acima. Mais precisamente, consideramos o ponto P do círculo trigonométrico associado a α e simplesmente *definimos* $\cos\alpha$ como a abcissa de P e $\operatorname{sen}\alpha$ como a ordenada de P.

Assim é que, para um arco $\alpha = \pi/2$, temos que o ponto P associado a α é $P = (0{,}1)$; logo, definimos $\cos(\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Da mesma forma, $\cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos(3\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$.

Agora, a Figura 6 mostra um exemplo com P no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \alpha < \pi$. Veja que, neste caso, temos $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$. Em geral, os sinais de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ correspondem aos sinais das abscissas e ordenadas em cada quadrante, conforme mostrado na Figura 3.

Ainda nas notações da Figura 6, se $\beta = \pi - \alpha$, então $0 < \beta < \pi$, de modo que $\cos\beta > 0$ e $\operatorname{sen}\beta > 0$. Por outro lado, observando o triângulo retângulo sombreado, temos $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta = |\cos\alpha|$, de sorte que $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.

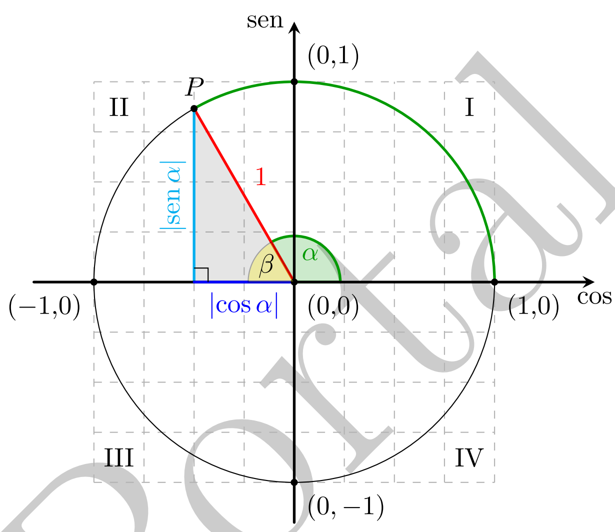


Figura 6: seno e cosseno no segundo quadrante.

Uma análise similar, com α pertencente a outro quadrante qualquer do círculo trigonométrico, mostra que as fórmulas acima valem sempre, isto é, que

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

3 Congruência de arcos

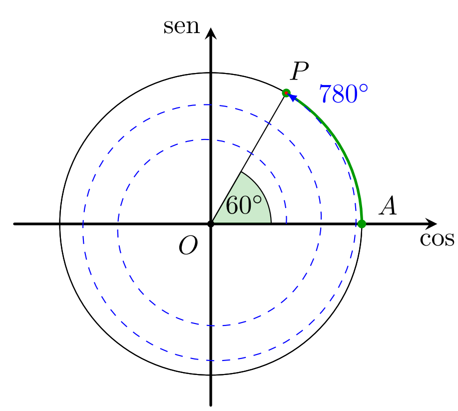
Conforme a discussão anterior já sugere, muitas vezes será conveniente trabalharmos com ângulos/arcos maiores do que 2π, bem como com ângulos/arcos negativos. Por exemplo, o que significa um arco de $450°$? Como $450 = 360+90$, percorrer um arco de $450°$ sobre o círculo é o mesmo que percorrer $360°$ seguido de $90°$, ou seja, dar uma volta completa seguida de um quarto de volta. Assim, um arco (no sentido anti-horário) que mede $450°$ e possui o ponto $A = (1{,}0)$ como extremidade inicial terá sua extremidade final no ponto $B = (0{,}1)$ – que também é a extremidade final de um arco de $90°$, medido no sentido anti-horário a partir de A.

Evidentemente, toda a discussão do parágrafo anterior também faz sentido em radianos: como $450° = 5\pi/2$ e $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$, percorrer um arco de $5\pi/2$ radianos no sentido anti-horário e a partir de $A = (1{,}0)$ nos leva ao ponto $B = (0{,}1)$ como extremidade final, ponto este que também é a extremidade final de um arco de $\pi/2$, medido no sentido anti-horário a partir de A.

Quando (como acima) dois ângulos/arcos possuem as mesmas extremidades, dizemos que eles são *congruentes*. Perceba que o arco $\widehat{AB}$ também é congruente ao $\widehat{BA}$ e este último pode ser obtido partindo de A e percorrendo $360 - 90 = 270$ graus no sentido horário.

Como arcos congruentes possuem as mesmas extremidades, a diferença entre eles corresponde a um certo número de voltas completas em torno do círculo trigonométrico, e isso vale mesmo no caso em que um ou ambos os arcos são negativos. Por exemplo, outra maneira de perceber que $-3\pi/2$ e $\pi/2$ são arcos congruentes é observando que $\pi/2 - (-3\pi/2) = 2\pi$, o que corresponde a uma volta completa em torno do círculo trigonométrico. Assim, um arco de $\pi/2$ radianos pode ser obtido primeiro percorrendo um arco de $-3\pi/2$ radianos e, em seguida (e a partir da extremidade final desse arco), percorrendo um arco, no sentido anti-horário, de 2π radianos.

Para outro exemplo, ângulos de medidas $780°$ e $60°$ são congruentes. Realmente, como $780 = 60 + 2 \cdot 360$, temos que um ângulo de $780°$ é obtido percorrendo $60°$ e mais duas voltas completas, como indicado na figura abaixo.



De modo geral, se α e β são as medidas em radianos de dois arcos (positivos ou negativos), temos α e β congruentes se, e somente se,

$$\alpha - \beta = 2\pi \cdot k,$$

para algum número inteiro k.

Em particular, se $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \beta$ são dois arcos congruentes no ciclo trigonométrico, então $P = Q$ e, dessa forma, *arcos congruentes possuem os mesmos senos e os mesmos cossenos.* Em símbolos,

$$\alpha - \beta = 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha = \cos \beta \end{cases}.$$

Exemplo 5. *Seja $A = (1,0)$. Encontre o comprimento do arco $\widehat{AP}$, entre 0 e 2π, que é congruente a $27\pi/4$ radianos. Em seguida, indique em qual quadrante do círculo trigonométrico se encontra o ponto P e calcule o seno e o cosseno de $27\pi/4$.*

Solução. Veja que

$$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\pi \cdot 3 + \frac{3\pi}{4}.$$

Isso quer dizer que, saindo do ponto A e percorrendo sobre o círculo um comprimento de $27\pi/4$ no sentido anti-horário, damos 3 voltas completas no círculo e, depois, ainda percorreremos $3\pi/4$ (também no sentido anti-horário). Logo, $\widehat{AP}$ mede $3\pi/4$.

Por fim, veja que $\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$, de sorte que o ponto P está situado no segundo quadrante (ou seja, no quadrante II) do círculo trigonométrico.

Por fim, veja que $\pi - 3\pi/4 = \pi/4$ radianos, que correspondem a 45 graus. Pelo que estudamos na seção anterior, fazendo $\alpha = 3\pi/4$ e $\beta = \pi/4$ temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

A **menor determinação positiva** de um arco α é o valor do menor arco não-negativo β que é congruente a ele. De outra forma, devemos ter $0 \leq \beta < 2\pi$ e $\alpha - \beta = 2\pi \cdot k$, para algum inteiro k. Por outro lado, a **maior determinação negativa** de α é o arco $\gamma < 0$ de menor valor absoluto tal que, (saindo de A e) percorrendo o comprimento $|\gamma|$ no sentido horário, chegamos a P. Evidentemente, $\beta - \gamma = 2\pi$.

Exemplo 6. *Calcule o arco, em radianos, equivalente a um ângulo de $1500°$. Em seguida, encontre a menor determinação positiva e a maior determinação negativa desse arco.*

Solução. Primeiramente, veja que, em radianos, o ângulo de $1500°$ corresponde a

$$\frac{1500}{360} \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{3}$$

radianos.

Para calcular a menor determinação positiva desse arco, dividimos 25 por 3, obtemos

$$\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi \cdot 4 + \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, a menor determinação positiva é $\frac{\pi}{3}$ e a maior determinação negativa é

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$$

□

Dicas para o Professor

Os objetivos dessa aula são: apresentar a definição de radiano, mostrar como converter de graus para radianos e vice-versa e apresentar o círculo trigonométrico. Não incluímos neste texto muitos exercícios, porque este módulo contém um outro arquivo com vários exercícios e esboços de soluções. Recomendamos que o professor resolva alguns desses exercícios com maiores detalhes no decorrer da aula.

À primeira vista, a noção de radianos pode parecer estranha para os alunos, pois no nosso dia a dia é muito mais comum medirmos ângulos em graus. Contudo, no Ensino Superior e em pesquisa científica a unidade padrão de medida de ângulos é o radiano. Um dos motivos é que o uso de radianos simplifica não apenas a fórmula para o comprimento de arcos no círculo unitário, como mostrado aqui, mas também inúmeras outras fórmulas (como as *derivadas* de funções trigonométricas e suas *séries de Taylor*, para citar apenas dois exempos). O uso de radianos também simplifica o uso de várias fórmulas em Física, como por exemplo as que descrevem movimento rotacional, pois simplifica as unidades de medidas expressas em tais fórmulas.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.