Módulo de Círculo Trigonométrico

Seno, Cosseno e Tangente

1ª série E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Círculo Trigonométrico
Seno, Cosseno e Tangente.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine

a) $\operatorname{sen} 120°$.

b) $\operatorname{sen} 180°$.

c) $\operatorname{sen} 240°$.

d) $\operatorname{sen} 315°$.

e) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4})$.

f) $\operatorname{sen}(\frac{7\pi}{6})$.

g) $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{3})$.

Exercício 2. Determine

a) $\cos 90°$.

b) $\cos 135°$.

c) $\cos 240°$.

d) $\cos 330°$.

e) $\cos(\frac{5\pi}{4})$.

f) $\cos(\frac{11\pi}{6})$.

g) $\cos(\frac{2\pi}{3})$.

Exercício 3. Determine

a) $\operatorname{tg} 120°$.

b) $\operatorname{tg} 225°$.

c) $\operatorname{tg} 240°$.

d) $\operatorname{tg} 300°$.

e) $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4})$.

f) $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{6})$.

g) $\operatorname{tg}(\frac{4\pi}{3})$.

Exercício 4. Determine

a) $\operatorname{sen} 720°$.

b) $\cos 1170°$.

c) $\operatorname{tg} 3540°$.

d) $\operatorname{sen} 3930°$.

e) $\cos(-2115)°$.

f) $\operatorname{tg}(-840)°$.

g) $\operatorname{sen}(-540)°$.

h) $\operatorname{sen}(\frac{51\pi}{4})$.

i) $\cos(\frac{37\pi}{6})$.

j) $\operatorname{tg}(\frac{29\pi}{3})$.

k) $\operatorname{sen}(-\frac{11\pi}{3})$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Qual a menor determinação de α, no segundo quadrante, tal que $\operatorname{sen}\alpha = 1/2$?

Exercício 6. Determine α, sendo $\cos\alpha = 0$.

Exercício 7. Determine α, sendo $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

Exercício 8. Determine α, no segundo quadrante, tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 9. Sabendo que $180° < \beta < 270°$ e $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, determine β.

Exercício 10. Sabendo que α é um arco do primeiro quadrante, quais são os valores de m que satisfazem a igualdade $\operatorname{sen}\alpha = 2m - 7$?

Exercício 11. A expressão $E = \frac{\operatorname{sen} 75° \cdot \cos 327° \cdot \operatorname{tg} 138°}{\operatorname{sen} 269° \cdot \operatorname{tg} 288°}$ é positiva, negativa ou zero?

Exercício 12. Para que valores de α, $0 \leq \operatorname{tg}\alpha \leq 1$?

Exercício 13. Determine os possíveis valores reais de k, sabendo que $\cos\beta = 2k + 3$.

Exercício 14. Se α é um arco do terceiro quadrante, determine se $E = \frac{\operatorname{tg}(180° + \alpha) \cdot \operatorname{sen}(270° - \alpha)}{\cos(\alpha - 90°)}$ é positivo, negativo ou zero.

Exercício 15. Determine o número de soluções da equação $\operatorname{sen}\alpha = 2/3$ no intervalo $[0, 9\pi]$.

Exercício 16. Determine as raízes da equação $2^{\operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de $15°$ com a vertical e elas têm, cada uma, uma altrua de $114m$ (altura indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Figura 1

Utilizando $0,26$ como valor aproximado para a tangente de $15°$ e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

a) menor que $100m^2$.

b) entre $100m^2$ e $300m^2$.

c) entre $300m^2$ e $500m^2$.

d) entre $500m^2$ e $700m^2$.

e) maior que $700m^2$.

Exercício 18. A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3(\cos((\frac{t-2}{6})\pi) + 5)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Exercício 19. O valor de $(\cos 165° + \operatorname{sen} 155° + \cos 145° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) $1/2$.

Exercício 20. O número real m que satisfaz à sentença $\dfrac{m+1}{m-2} = \cos 3015°$ é

a) $4 - 3\sqrt{2}$.

b) $3\sqrt{2} - 4$.

c) $3 - 4\sqrt{2}$.

d) $4\sqrt{2} + 3$.

e) $3\sqrt{2} + 4$.

Respostas e Soluções.

1.

a) $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$.

b) $\operatorname{sen} 180° = 0$.

c) $\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\sqrt{3}/2$.

d) $\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\sqrt{2}/2$.

e) $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4} = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$.

f) $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = -1/2$.

g) $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}/2$.

2.

a) $\cos 90° = 0$.

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos 240° = -\cos 60° = -1/2$.

d) $\cos 330° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$.

e) $\cos(5\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.

f) $\cos(11\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

g) $\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$.

3.

a) $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

b) $\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg} 45° = 1$.

c) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

d) $\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

e) $\operatorname{tg}(7\pi/4) = -\operatorname{tg}(\pi/4) = -1$.

f) $\operatorname{tg}(5\pi/6) = -\operatorname{tg}(\pi/6) = -\sqrt{3}/3$.

g) $\operatorname{tg}(4\pi/3) = \operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$.

4.

a) $\operatorname{sen} 720° = \operatorname{sen} 0° = 0$.

b) $\cos 1170° = \cos 90° = 0$.

c) $\operatorname{tg} 3540° = \operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

d) $\operatorname{sen} 3930° = \operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -1/2$.

e) $\cos(-2115)° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$.

f) $\operatorname{tg}(-840)° = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

g) $\operatorname{sen}(-540)° = \operatorname{sen} 180° = 0$.

h) $\operatorname{sen}(51\pi/4) = \operatorname{sen}(3\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

i) $\cos(37\pi/6) = \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$.

j) $\operatorname{tg}(29\pi/3) = \operatorname{tg}(5\pi/3) = -\operatorname{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}$.

k) $\operatorname{sen}(-11\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

5. Se α fosse do primeiro quadrante, então α seria $30°$, mas como pertence ao segundo quadrante, $\alpha = 180° - 30° = 150°$.

6. $\cos\alpha = 0$ nas extremidades superior e inferior do círculo trigonométrico. Assim, temos $\alpha = \{90°, 270°, 450°, ...\}$, ou seja, $\alpha = 90° + 180°k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, ou ainda, $\alpha = \pi/2 + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

7.
Se $\operatorname{tg}\alpha = 1$, então $\alpha = \pi/4 + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

8. $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

9. $\beta = 180° + 45° = 225°$.

10. Como $\alpha \in$ ao primeiro quadrante, então $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$. Assim, temos $0 < 2m - 7 < 1$, segue que $7/2 < m < 4$.

11. $\dfrac{\operatorname{sen} 75° \cdot \cos 327° \cdot \operatorname{tg} 138°}{\operatorname{sen} 269° \cdot \operatorname{tg} 288°} = \dfrac{(+)\cdot(+)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)} < 0$, portanto a expressão é negativa.

12. No primeiro quadrante (menor determinação positiva do arco), temos $0° \leq \alpha \leq 45°$. No terceiro quadrante (e menor determinação potivita do arco), temos $180° \leq \alpha \leq 225°$. Generalizando, chegamos a $180°k \leq \alpha \leq 45° + 180°k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

13. Sabemos que $-1 \leq \cos\beta \leq 1$. Assim, temos $-1 \leq 2k + 3 \leq 1$, segue que $-2 \leq k \leq -1$.

14. Como α é um arco do terceiro quadrante, então $\operatorname{tg}(180° + \alpha) > 0$, $\operatorname{sen}(270° - \alpha) > 0$ e $\cos(\alpha - 90°) < 0$. Dessa forma, $E = (+)(+)/(-) < 0$, ou seja, E é negativo.

15. Como $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$, α é um arco do primeiro ou segundo quadrantes. No intervalo $[0, 9\pi]$, que equivale a quatro voltas e meia no círculo trigonométrico, passaremos cinco vezes por cada um destes quadrantes, ou seja, são 10 soluções.

16.

$$
\begin{aligned}
2^{\operatorname{sen} x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
2^{\operatorname{sen} x} &= 2^{-1/2}\\
\operatorname{sen} x &= -1/2\\
x &= 210° + k360°, ou\\
x &= 330° + k360°, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

17. (ENEM 2013) Chamando de ℓ o lado da base quadrada do prédio, temos $\text{tg}\,15° = \dfrac{\ell}{114}$, segue $\ell = 29,64m$. Portanto a área é $(29,64)^2 = 858,73m^2$. Resposta E.

18. (EsPCEx 2014) Resposta A. Tomando um intervalo de 12 meses, por exemplo, $2 < t < 14$, teremos uma volta completa no círculo trigonométrico. Isso significa que metade do tempo, dois trimestres, $\cos((\dfrac{t-2}{6})\pi)$ aumenta $(2 < t < 5e11 < t < 14)$ e, consequentemente, o período é de chuva.

19. (EsPCEx 2014) Como a expressão é equivalente a $(-\cos 15° + \text{sen}\,25° - \cos 35° - \text{sen}\,25° + \cos 35° + \cos 15°)$, seu valor é 0. Resposta C.

20. $\dfrac{m+1}{m-2} = \cos 3015° = \cos 135° = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2$. Assim, temos $2(m+1) = -\sqrt{2}(m-2)$, segue que $m = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}+2} = 3\sqrt{2} - 4$. Resposta B.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com