

Material Teórico - Círculo Trigonométrico

A relação fundamental da Trigonometria

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de novembro de 2018



1 A relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco de medida α radianos a seguinte equação, que relaciona o seno e o cosseno de α , é satisfeita:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (1)$$

Essa é a *relação fundamental da Trigonometria*.

Observação 1. Note que $\text{sen}^2(\alpha)$ representa o quadrado do valor do seno de α , número que também pode ser escrito como $(\text{sen}(\alpha))^2$, mas que é diferente do seno de α^2 , ou seja, de $\text{sen}(\alpha^2)$. Por exemplo, $\text{sen}((\sqrt{\pi})^2) = \text{sen}(\pi) = 0$, mas $\text{sen}^2(\sqrt{\pi}) > 0$, uma vez que $0 < \sqrt{\pi} < \pi$.

O caso particular dessa relação em que $0 < \alpha < \pi/2$ já havia sido estudado na primeira aula do módulo “Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares” do Nono Ano. Na aula passada estendemos a noção de seno e cosseno para arcos de quaisquer medidas. Agora, mostraremos que a relação fundamental continua válida para todo arco α .

Nas aulas 1 e 2 do módulo atual, vimos que se $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e α é um arco qualquer, então $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{sen}(\alpha)$ são, nesta ordem (veja que o cosseno vem primeiro), a abscissa e a ordenada do ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que $\widehat{AP} = \alpha$ (com a convenção de que o arco \widehat{AP} é medido, a partir de A , no sentido anti-horário). Em outras palavras, sob tal convenção, temos

$$\widehat{AP} = \alpha \Rightarrow P = (\text{cos}(\alpha), \text{sen}(\alpha)).$$

Na aula passada vimos desenhos em que P pertence a cada um dos quadrantes e, em cada um deles, encontramos um triângulo retângulo cujos catetos medem $|\text{sen}(\alpha)|$ e $|\text{cos}(\alpha)|$ e cuja hipotenusa mede 1. (Veja que precisamos tomar os valores absolutos do seno e cosseno, pois, dependendo do quadrante ao qual o ponto P pertença, podemos ter $\text{sen}(\alpha) < 0$ ou $\text{cos}(\alpha) < 0$; contudo, os comprimentos dos lados do triângulo sempre são números positivos.)

Exercício 2. Antes de consultar as figuras da aula passada, para cada quadrante do círculo trigonométrico, escolha um ponto qualquer $P = (x,y)$ e desenhe um triângulo retângulo cujos catetos possuem medidas $|x|$ e $|y|$ e cuja hipotenusa é OP , onde $O = (0,0)$. Seja $\alpha = \widehat{AP}$, onde $A = (1,0)$. Interprete quais segmentos possuem comprimentos $|\text{cos}(\alpha)|$ e $|\text{sen}(\alpha)|$ no seu desenho.

Aplicando o teorema de Pitágoras a tal triângulo retângulo, obtemos que, para qualquer α , vale

$$|\text{sen}(\alpha)|^2 + |\text{cos}(\alpha)|^2 = 1^2.$$

Para concluir, basta observar que independentemente do seno e cosseno de α serem positivos ou negativos, temos

que

$$|\text{sen}(\alpha)|^2 = \text{sen}^2(\alpha) \quad \text{e} \quad |\text{cos}(\alpha)|^2 = \text{cos}^2(\alpha),$$

o que, conjuntamente com a igualdade anterior, nos fornece a relação fundamental.

A relação fundamental nos diz que, se conhecermos o valor do cosseno de um arco, então o valor absoluto de seu seno está determinando; se, adicionalmente, soubermos o quadrante do arco, então poderemos encontrar também o sinal de seu seno. Da mesma forma, se conhecermos o seno e o quadrante de um arco, poderemos calcular seu cosseno. O exemplos a seguir exercita tais procedimentos.

Exemplo 3. Seja β um arco cujo comprimento é tal que $\pi < \beta < 3\pi/2$. Sabendo que $\text{cos}(\beta) = 0,6$, calcule $\text{sen}(\beta)$.

Solução 1. Substituindo $\text{cos}(\beta) = 0,6$ na relação fundamental da Trigonometria (ou seja, fazendo $\alpha = \beta$ na equação (1)), temos que:

$$\text{sen}^2(\beta) + (0,6)^2 = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\beta) &= 1 - (0,6)^2 \\ &= 1 - 0,36 \\ &= 0,64. \end{aligned}$$

Temos que $\sqrt{0,64} = 0,8$. A princípio, isso nos dá dois possíveis valores para $\text{sen}(\beta)$:

$$\text{sen}(\beta) = 0,8 \quad \text{ou} \quad \text{sen}(\beta) = -0,8.$$

Mas o enunciado no diz que $\pi < \beta < 3\pi/2$, ou seja, β está no terceiro quadrante. Com isso, temos que $\text{sen}(\beta) < 0$, logo, $\text{sen}(\beta) = -0,8$. \square

Uma decorrência útil de (1) é a seguinte: suponha que α e α' sejam arcos distintos, tais que $\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\alpha')$. Então, aplicando a relação fundamental duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} |\text{sen}(\alpha)| &= \sqrt{1 - \text{cos}^2(\alpha)} \\ &= \sqrt{1 - \text{cos}^2(\alpha')} \\ &= |\text{sen}(\alpha')|, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\alpha') \implies \text{sen}(\alpha) = \pm \text{sen}(\alpha'). \quad (2)$$

Portanto, se soubermos os sinais de $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{sen}(\alpha')$ (por exemplo, se soubermos os quadrantes aos quais os arcos α e α' pertencem), descobriremos facilmente qual das duas igualdades acima ocorre.

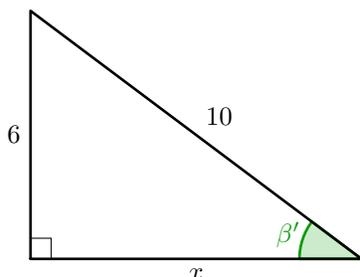
Evidentemente, também vale que

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha') \implies \text{cos}(\alpha) = \pm \text{cos}(\alpha'),$$

com observações análogas às feitas acima sobre a escolha entre os sinais $+$ ou $-$.

De posse de tais comentários, temos a seguinte solução alternativa para o problema anterior.

Solução 2. Construíamos um triângulo retângulo que possui um ângulo de medida β' tal que $0 < \beta' < \pi/2$ e $\cos(\beta') = 0,6$. (Isto é possível, uma vez que os valores $\cos(\beta')$, com β' variando no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, preenchem todo o intervalo $(0,1)$.) Como $\cos(\beta') = 0,6 = \frac{6}{10}$, uma maneira de construir tal triângulo é tomar um cateto de medida 6 e a hipotenusa de medida 10.



Seja x a medida do outro cateto do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$x^2 + 6^2 = 10^2 \implies x^2 = 100 - 36 = 64.$$

Como $x > 0$, segue que $x = 8$.

Ainda observando o triângulo, veja que

$$\text{sen}(\beta') = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Como $\cos(\beta) = \cos(\beta')$, aplicando (2) com β e β' no lugar de α e α' , obtemos

$$\text{sen}(\beta) = \pm 0,8.$$

Mas como β está no terceiro quadrante, seu seno é negativo. Logo, $\text{sen}(\beta) = -0,8$. \square

Observação 4. Ao construir o triângulo acima, note que há várias possibilidades para os comprimentos dos catetos; por exemplo, poderíamos ter escolhido 0,6 e 1 no lugar de 6 e 10. A escolha que fizemos foi apenas para facilitar os cálculos, uma vez que 6 e 10 são números inteiros. Outra ótima escolha seria 3 e 5, o que resultaria no “famoso” triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

Um outro tipo de problema-padrão envolvendo a relação fundamental é o descrito pelo exemplo a seguir.

Exemplo 5. Calcule $\text{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, sabendo que α pertence ao segundo quadrante e

$$\left| \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right| = \frac{7}{24}.$$

Solução. Como α pertence ao segundo quadrante, temos $\text{sen}(\alpha) > 0$ e $\cos(\alpha) < 0$. Portanto, $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} < 0$, de sorte que

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{7}{24}.$$

Então, $\text{sen}(\alpha) = -\frac{7}{24} \cos(\alpha)$ e, substituindo essa igualdade em (1), obtemos

$$\left(-\frac{7}{24} \cos(\alpha) \right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Isso é o mesmo que $\left(\frac{7^2 + 24^2}{24^2} \right) \cos^2(\alpha) = 1$ ou, ainda,

$$\cos^2(\alpha) = \left(\frac{24}{25} \right)^2.$$

Como $\cos(\alpha) < 0$, temos $\cos(\alpha) = -\frac{24}{25}$ e, daí,

$$\text{sen}(\alpha) = -\frac{7}{24} \cos(\alpha) = -\frac{7}{24} \left(-\frac{24}{25} \right) = \frac{7}{25}.$$

\square

Os últimos dois exemplos são mais elaborados.

Exemplo 6. Qual o valor máximo que $\cos(x) \cdot \text{sen}(x)$ pode assumir quando x varia sobre todos os números reais.

Solução. Ao elevar qualquer número real ao quadrado, obtemos um número não negativo. Assim, para qualquer valor real de x , vale que

$$(\text{sen}(x) - \cos(x))^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação acima, obtemos

$$\text{sen}^2(x) - 2 \text{sen}(x) \cos(x) + \cos^2(x) \geq 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) \geq 2 \text{sen}(x) \cos(x).$$

Agora, a relação fundamental fornece a igualdade $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, o que reduz a última desigualdade a

$$\text{sen}(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Para que $\frac{1}{2}$ seja o valor máximo de $\text{sen}(x) \cos(x)$, resta checar que ele é atingido, isto é, que existe um valor real de x tal que $\text{sen}(x) \cos(x)$ valha, de fato, $\frac{1}{2}$. Para tanto, observe que teremos $\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$ exatamente quando tivermos

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 2 \text{sen}(x) \cos(x),$$

isto é, exatamente quando ocorrer a igualdade

$$(\text{sen}(x) - \cos(x))^2 = 0.$$

Então, para que $\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$, devemos ter $\text{sen}(x) = \cos(x)$. Testando $x = \frac{\pi}{4}$ radianos, temos que $\text{sen}(x) = \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o que nos dá a igualdade desejada.

Dessa forma, o valor máximo de $\text{sen}(x) \cos(x)$ é $\frac{1}{2}$. \square

Vale observar que, quando progredirmos um pouco mais em nossa aprendizagem de Trigonometria, poderemos dar uma solução muito mais simples para o exemplo anterior. Realmente, veremos que para todo real x vale a igualdade

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Dessa forma, e lembrando que todo seno vale no máximo 1, obtemos imediatamente

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2}.$$

Para haver igualdade, devemos ter $\sin(2x) = 1$, e uma possibilidade é que seja $2x = \frac{\pi}{2}$, o que fornece $x = \frac{\pi}{4}$.

Uma modificação esperta da primeira solução do exemplo anterior resolve o próximo.

Exemplo 7. Encontre o valor máximo da expressão

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x)$$

quando x varia nos reais.

Solução. Primeiramente, observe que $9^2 + 12^2 = 15^2$. Então, escrevemos

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x) = 15 \left(\frac{9}{15} \sin(x) + \frac{12}{15} \cos(x) \right).$$

Veja agora que, para todo x real, temos

$$\left(\frac{9}{15} - \sin(x) \right)^2 + \left(\frac{12}{15} - \cos(x) \right)^2 \geq 0.$$

Expandindo os quadrados do primeiro membro, obtemos

$$\frac{9^2 + 12^2}{15^2} + \sin^2(x) + \cos^2(x) - \frac{2}{15} (9 \sin(x) + 12 \cos(x)) \geq 0.$$

Usando a relação fundamental, ficamos com

$$\frac{2}{15} (9 \sin(x) + 12 \cos(x)) \leq 2$$

ou, ainda,

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x) \leq 15.$$

Como no exemplo anterior, para ver que o valor máximo é 15, temos de mostrar que a igualdade ocorre para algum valor real de x . Também como antes, para a igualdade devemos ter

$$\left(\frac{9}{15} - \sin(x) \right)^2 + \left(\frac{12}{15} - \cos(x) \right)^2 = 0,$$

de sorte que

$$\sin(x) = \frac{9}{15} \text{ e } \cos(x) = \frac{12}{15}.$$

Ora, uma vez que

$$\left(\frac{9}{15} \right)^2 + \left(\frac{12}{15} \right)^2 = 1,$$

o ponto $\left(\frac{12}{15}, \frac{9}{15} \right)$ pertence ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico, de forma que realmente existe um valor de x tal que $\sin(x) = \frac{9}{15}$ e $\cos(x) = \frac{12}{15}$. \square

2 Sobre os propósitos da Trigonometria

É instrutivo terminar este material tecendo uma observação genérica sobre os propósitos da Trigonometria.

Historicamente, a ideia por trás da criação da Trigonometria foi a de obter ferramentas que tornassem mais simples a análise de problemas de Geometria. Isso pode parecer contraditório quando olhamos para a segunda solução do Exemplo 3, na qual fizemos exatamente o contrário: utilizamos argumentos geométricos para resolver um problema trigonométrico. Contudo, a razão é simplesmente que, até o momento, desenvolvemos muito pouca Trigonometria. À medida que avançarmos mais, ficará claro o quão poderosa a Trigonometria é, como auxiliar à Geometria.

Posteriormente, com advento da Física Newtoniana e do conceito de função, ficou evidente que as funções trigonométricas \sin e \cos eram as ferramentas adequadas para descrever uma série de fenômenos físicos, como por exemplo o *movimento harmônico simples* (MHS), no qual uma massa presa a uma mola presa a uma parede oscila na direção do eixo definido pela mola, apoiada sobre uma superfície suficientemente grande e sujeita a um atrito cinético desprezível (veja a figura abaixo). De fato, pode ser

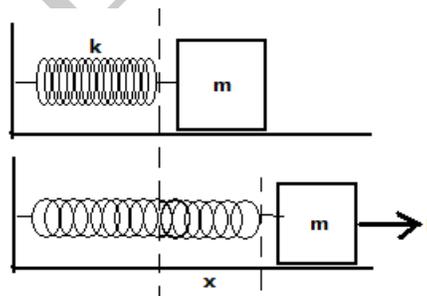


Figura 1: o movimento harmônico simples.

mostrado (veja a referência [1] por exemplo) que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad (3)$$

em que $x(t)$ é a *elongação* da mola no instante t , medida em relação a partir do repouso como mostrado na figura, e x_0 , v_0 e ω são parâmetros ligados às condições iniciais de movimento e à natureza da mola.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e argumentando como no Exemplo 7, veremos posteriormente que $\sqrt{a^2 + b^2}$ é o maior valor possível para $a \sin(u) + b \cos(u)$, à medida que u varia em \mathbb{R} , de forma que

$$|a \sin(u) + b \cos(u)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aplicando este fato a (3), com $a = \frac{v_0}{\omega}$, $b = x_0$ e $u = \omega t$, obtemos

$$|x(t)| \leq \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

o que já ilustra bem a importância da Trigonometria (e da relação fundamental) como ferramenta matemática para a Física. A constante $\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ é conhecida como a *amplitude* do MHS.

Dicas para o Professor

O objetivo aqui é continuar trabalhando com as funções seno e cosseno, pensando no parâmetro dessas funções como um número real qualquer. Vimos que a célebre relação fundamental da trigonometria continua valendo e que, sabendo o quadrante do arco, o seno de um ângulo determina seu cosseno e vice-versa; da mesma forma, a razão entre o seno e o cosseno determina cada um deles.

Recomendamos que esse material sejam apresentado em dois encontros de 50 minutos, reservando o segundo encontro para a discussão dos dois últimos exemplos da primeira seção, bem como para a discussão da segunda seção.

A referência [2] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria.

A lista de exercícios, anexa a essa aula, traz vários exercícios resolvidos, incluindo várias maneiras de utilizar a relação fundamental para simplificar fórmulas trigonométricas. Assim, eles aprofundam o material dessa aula. Sugerimos que o leitor tente resolvê-los e verifique as soluções e em um segundo momento.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. SBM, Coleção Profmat, Rio de Janeiro, 2014.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.