Módulo de Círculo Trigonométrico

Relação Fundamental da Trigonometria

1ª série E.M.

Círculo Trigonométrico
Relação Fundamental da Trigonometria.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $\operatorname{sen} x = 1/3$, determine $\cos x$.

Exercício 2. Se $\cos x = -1/4$, determine $\operatorname{sen} x$.

Exercício 3. Seja x um arco do terceiro quadrante. Se $\operatorname{tg} x = 3/4$, determine $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$.

Exercício 4. Sabendo que $0 < x < \pi/2$ e $\operatorname{sen} x = 3/5$, determine $\cos x$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Sabendo que x é um arco do quarto quadrante e $6\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$, determine $\cos x$.

Exercício 6. Se $\cos x = 2\operatorname{sen} x$, sendo x um arco do primeiro quadrante, determine $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$.

Exercício 7. Se $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, determine $\cos 18^\circ$.

Exercício 8. Demonstre a igualdade $1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x = \cos^4 x$.

Exercício 9. Se x é a medida de um arco em radianos e a um número real, determine a sabendo que $\operatorname{sen} x = \sqrt{3-a}$ e $\cos x = \dfrac{a-2}{2}$.

Exercício 10. Demonstre a igualdade $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Exercício 11. Demonstre a igualdade $\dfrac{1 - 2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Exercício 12. Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$ é igual a $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

Exercício 13. Mostre que $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1 - \cos x)^2$ é igual $\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Sabendo que $9\operatorname{sen} x + 3\sqrt{5}\cos x = 11$, com $0 < x < \pi/2$, determine $\operatorname{tg} x$.

Exercício 15. Se $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi/4) = 2\operatorname{sen}(\pi/4)$, determine $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$, sendo x um arco do terceiro quadrante.

Exercício 16. Para que valores de x vale a equação $(\cos x + \operatorname{sen} x)^4 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^4 = 2[(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^2]$?

Respostas e Soluções.

1. Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Daí, segue

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x &= 1\\
\cos^2 x &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\\
\cos^2 x &= \frac{8}{9}\\
\cos x &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Outra maneira de resolver este tipo de problema, que é muito comum em questões de trigonometria, é utilizar o dado fornecido ($\operatorname{sen} x = 1/3$) para a construção de um triângulo retângulo, como o da figura.

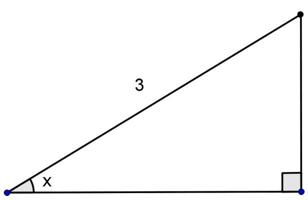

Figura 1

Perceba que, em relação ao ângulo x, o cateto oposto vale 1 e a hipotenusa vale 3. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos $2\sqrt{2}$ para o cateto adjacente. Basta agora calcular o cosseno de x, que é $\dfrac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Não podemos nos esquecer de analisar o sinal do cosseno. Como no enunciado não foi especificado o quadrante do arco, usamos tanto positivo quanto negativo.

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 &= 1\\
(\operatorname{sen} x)^2 &= 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^2\\
(\operatorname{sen} x)^2 &= \frac{15}{16}\\
\operatorname{sen} x &= \pm\frac{\sqrt{15}}{4}.
\end{aligned}$$

3. Um triângulo retângulo, no qual a tangente de um dos ângulos é 3/4, pode ser observado na figura. Observe que a hipotenusa pode ser facilmente calculada utilizando-se o Teorema de Pitágoras.

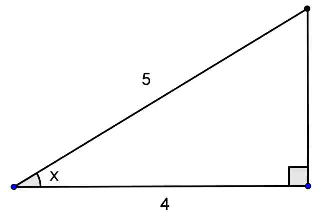

Figura 2

Lembrando que x é um arco do terceiro quadrante, temos então $\operatorname{sen} x = -3/5$ e $\cos x = -4/5$.

4.

$$\begin{aligned}
(\frac{3}{5})^2 + \cos^2 x &= 1\\
\cos^2 x &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\\
\cos^2 x &= \frac{16}{25}\\
\cos x &= \pm\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Como x é um arco do primeiro quadrante, $\cos x = 4/5$.

5. Fazendo uma simples substituição de incógnitas, $\operatorname{sen} x = y$, temos a equação do segundo grau $6y^2 - y - 1 = 0$, que tem como raízes, $-1/3$ e $1/2$. Como x é um arco do quarto quadrante, $\operatorname{sen} x = -1/3$. Usando a relação fundamental da trigonometria, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \cos^2 x &= 1\\
\cos^2 x &= 1 - (\frac{-1}{3})^2\\
\cos^2 x &= \frac{8}{9}\\
\cos x &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

como $x \in 4^\circ$ quadrante, $\cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. Elevando a equação ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}
(\cos x)^2 &= 4(\operatorname{sen} x)^2\\
1 - (\operatorname{sen} x)^2 &= 4(\operatorname{sen} x)^2\\
(\operatorname{sen} x)^2 &= \frac{1}{5}\\
\operatorname{sen} x &= \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

Como x é um arco do primeiro quadrante, $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Utilizando o triângulo da figura abaixo, obtém-se $\operatorname{tg} x = 1/2$.

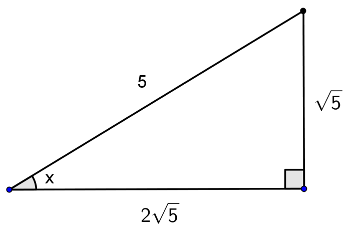

Figura 3

7. Como $72°$ e $18°$ são complementares, $\cos 72° = \operatorname{sen} 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Pela relação fundamental da trigonometria, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \cos^2 18° &= 1\\
\cos^2 18° &= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}\\
\cos^2 18° &= \frac{10+2\sqrt{5}}{16}\\
\cos 18° &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
1 - 2(\operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{sen} x)^4 &= [1-(\operatorname{sen} x)^2]^2\\
&= (\cos^2 x)^2\\
&= \cos^4 x.
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 &= 1\\
(\sqrt{3-a})^2 + \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 &= 1\\
3 - a + \frac{a^2-4a+4}{4} &= 1\\
12 - 4a + a^2 - 4a + 4 &= 4\\
a^2 - 8a + 12 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equaão anterior, como $3-a \geq 0$, temos $a = 2$.

10.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\\
&= \frac{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}\\
&= \frac{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}.
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
\frac{1-2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} &= \frac{1-\cos^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\\
&= \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\\
&= \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}}{\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}}\\
&= \frac{1}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x}\\
&= \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

13. Fazendo $E = (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1-\cos x)^2$, temos

$$\begin{aligned}
E &= (\operatorname{tg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)^2 + 1 - 2\cos x + \cos^2 x\\
&= (\operatorname{tg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - 2\cos x + 2\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} - 2\cos x + 2\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x - 2\cos^3 x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x - 2\cos x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x - 2\cos x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1+\cos^2 x - 2\cos x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{(1-\cos x)^2}{\cos^2 x}\\
&= \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)^2.
\end{aligned}$$

14. Chamando $\cos x = a$, temos $\operatorname{sen} x = \dfrac{11-3\sqrt{5}a}{9}$. Substituindo estes valores na relação fundamental da trigonometria, chegamos à equação $63a^2 - 33\sqrt{5} + 20 = 0$, onde suas raízes são $\sqrt{5}/3$ e $4\sqrt{5}/21$. Porém, com $a = 4\sqrt{5}/21$, teríamos $\operatorname{sen} x > 1$. Assim, tomando $a = \sqrt{5}/3$, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\
&= \frac{\frac{11 - 3\sqrt{5}a}{9}}{a} \\
&= \frac{11 - 3\sqrt{5}\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \\
&= \frac{18\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi/4) &= 2\operatorname{sen}(\pi/4) \\
\operatorname{tg} x &= 2\operatorname{sen}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\pi/4) \\
\operatorname{tg} x &= 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\
\operatorname{tg} x &= \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Usando o triângulo retângulo da figura, cuja $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$, podemos calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

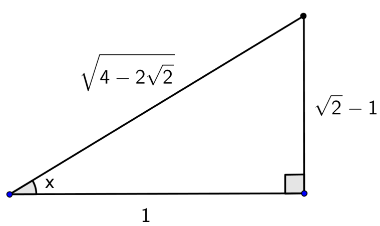

Figura 4

Temos então:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cdot \cos x &= \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2(2-\sqrt{2})}.
\end{aligned}$$

16. Note que $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x - \operatorname{sen} x)^2 = 2$. Assim, pela diferença de quadrados, com $A = (\cos x + \operatorname{sen} x)^2$ e $B = (\cos x - \operatorname{sen} x)^2$, temos

$$\begin{aligned}
(\cos x + \operatorname{sen} x)^4 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^4 &= A^2 - B^2 \\
&= (A-B)(A+B) \\
&= 2(A-B).
\end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida qualquer que seja o valor de x.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com