Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Praticando as Propriedades

Primeiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

06 de maio de 2019

Nesta aula, iremos resolver alguns exemplos em que se aplicam as propriedades dos logaritmos estudadas na aula *Função Logarítmica e Propriedades.*

1 Simplificação de expressões

Exemplo 1. *Se n é um número natural maior do que 2, considere*

$$A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdots \log_n(n-1) \tag{1}$$

(a) Simplifique a expressão (1).

(b) Verifique que A pode estar tão próximo de zero quanto se queira, desde que n seja suficientemente grande.

Solução.
(a) Vamos usar a *fórmula de mudança de base* (veja a aula *Logaritmos e suas propriedades*, parte 1, p.3):

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Em nosso caso, usaremos a base e (mas poderíamos utilizar outra base qualquer):

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}, \tag{2}$$

em que $\ln x = \log_e x$ é o logaritmo de x na base e.

Aplicando (2) aos fatores de (1), obtemos

$$A = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 4} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 5} \cdots \frac{\ln(n-2)}{\ln(n-1)} \cdot \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

O cancelamento de termos que se repetem nos numeradores e denominadores simplifica a expressão para

$$A = \frac{\ln 2}{\ln n} = \log_n 2.$$

Vale observar que, sendo $n > 1$ e $2 > 1$, temos $A = \log_n 2 > \log_n 1 = 0$, ou seja, A é positivo.

(b) Seja $\varepsilon > 0$ um número real escolhido arbitrariamente (pense em ϵ como um número positivo e *pequeno*). Queremos encontrar um número natural n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow A = \log_n 2 < \varepsilon.$$

Na expressão acima, ε pode ser interpretado como uma *exigência* imposta sobre A: quanto menor for ε, maior será a exigência imposta sobre A. É preciso, então, encontrar um n_0 suficientemente grande para que a exigência imposta seja cumprida, sempre que $n \geq n_0$.

Uma vez que $n > 1$, a função $\log_n$ é uma função crescente. Assim, a desigualdade $\log_n 2 < \varepsilon$ é equivalente a $n^\varepsilon > 2$. Por sua vez, $n^\varepsilon > 2$ é equivalente a $n > 2^{1/\varepsilon}$. Seja $n_0 = \lfloor 2^{1/\varepsilon} \rfloor + 1$ o primeiro número natural a superar $2^{1/\varepsilon}$. Então,

$$n \geq n_0 \Rightarrow n > 2^{1/\varepsilon}$$

e, como vimos acima, isso implica $\log_n 2 < \varepsilon$.

Na linguagem do *Cálculo* a situação acima é descrita pela seguinte frase:

A tende a zero quando n tende ao infinito.

□

Exemplo 2. *Dado um real positivo a, simplifique a expressão*

$$a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}. \tag{3}$$

Solução. Chame a expressão dada de x. Usando a definição de logaritmo, obtemos

$$\frac{\log(\log a)}{\log a} = \log_a x = \frac{\log x}{\log a},$$

onde a última igualdade foi obtida com a ajuda da fórmula de mudança de base. Assim,

$$\log(\log a) = \frac{\log x}{\log a} \cdot \log a$$

e, cancelando o fator $\log a$ no segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\log(\log a) = \log x.$$

Por fim, uma vez que a função logarítmica é injetiva, a igualdade acima implica

$$x = \log a.$$

□

2 Expressões algébricas envolvendo logaritmos

Exemplo 3. *Seja $x > 1$ um número real e suponha que $a = \log\left(x - \frac{1}{x}\right)$ e $b = \log\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$. Calcule $\log\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$ em função de a e b.*

Solução. Primeiramente, chamemos $y = x - \frac{1}{x}$ e observemos que

$$\begin{aligned} y^3 &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \\ &= x^3 + 3x^2\left(-\frac{1}{x}\right) + 3x\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^3 \\ &= x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{x^3} &= y^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= y^3 + 3y = y(y^2+3), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \log\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) &= \log(y(y^2+3)) \\ &= \log y + \log(y^2+3). \end{aligned} \tag{4}$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \\ &= x^2 + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2, \end{aligned}$$

de modo que $y^2 + 3 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$. Então,

$$b = \log\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) = \log(y^2+3).$$

Voltando à expressão (4), obtemos finalmente

$$\log\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = \log y + \log(y^2+3) = a + b.$$

□

Exemplo 4. *Sejam a e b números reais positivos tais que $a^2 + b^2 = 7ab$. Mostre que*

$$\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Solução. Inicialmente, a partir da igualdade dada $a^2 + b^2 = 7ab$, obtemos, somando $2ab$ a ambos os membros:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab,$$

o que é equivalente a

$$(a+b)^2 = 9ab.$$

Extraindo raízes quadradas, ficamos com

$$a + b = 3\sqrt{ab}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{a+b}{3} = (ab)^{1/2}.$$

Por fim, aplicando logaritmos a ambos os membros, obtemos

$$\log\frac{a+b}{3} = \log(ab)^{1/2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

□

Exemplo 5. *Sejam x um número real positivo e a um número real maior do que 1. Escreva*

$$y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}} \quad e \quad z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}.$$

Mostre que $x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$.

Solução. Pela definição de logaritmo, a segunda igualdade dada é equivalente a

$$\log_a z = \frac{1}{1-\log_a y}.$$

Invertendo ambos os membros, obtemos

$$\frac{1}{\log_a z} = 1 - \log_a y \Leftrightarrow \log_a y = 1 - \frac{1}{\log_a z}.$$

Por outro lado, da primeira igualdade dada, segue que

$$\log_a y = \frac{1}{1-\log_a x}.$$

Igualando os segundos membros dessas duas últimas igualdades, obtemos

$$1 - \frac{1}{\log_a z} = \frac{1}{1-\log_a x}.$$

Essa igualdade é equivalente a

$$1 - \log_a x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\log_a z}} = \frac{1}{\frac{\log_a z - 1}{\log_a z}} = \frac{\log_a z}{\log_a z - 1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \log_a x &= 1 - \frac{\log_a z}{\log_a z - 1} \\ &= \frac{\log_a z - 1 - \log_a z}{\log_a z - 1} \\ &= \frac{-1}{\log_a z - 1} = \frac{1}{1-\log_a z} \end{aligned}$$

e esta igualdade acarreta que $x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$. □

3 Equações logarítmicas

Exemplo 6. *Encontre as soluções da equação*

$$\log_{(x-1)}(13 - x) = 2.$$

Solução. Antes de resolver a equação, devemos determinar os valores de x para os quais o logaritmo em questão está definido.

As condições de definição para a base do logaritmo são $x-1>0$ e $x-1\neq 1$, isto é, $x>1$ e $x\neq 2$. Para o logaritmando, a condição é $13-x>0$, ou seja, $x<13$. Assim, devemos ter $1<x<13$ e $x\neq 2$, ou seja, $x\in(1,2)\cup(2,13)$.

Agora, pela definição de logaritmo, temos

$$\log_{(x-1)}(13-x)=2\Leftrightarrow 13-x=(x-1)^2,$$

que por sua vez é equivalente a $x^2-2x+1=13-x$ ou, ainda, $x^2-x-12=0$. As soluções dessa equação quadrática são $x=-3$ e $x=4$. Destas, apenas $x=4$ pertence ao conjunto de valores permitidos para x, de forma que a única solução é $x=4$. □

Exemplo 7. *Resolva a equação*

$$\left(\log_{\sqrt{5}}x\right)\cdot\sqrt{\log_x(5\sqrt{5})+\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})}=-\sqrt{6}.$$

Solução. A equação dada é equivalente a

$$\left(\log_{5^{1/2}}x\right)\cdot\left(\log_x 5^{3/2}+\log_{5^{1/2}}5^{3/2}\right)^{1/2}=-\sqrt{6},$$

ou seja,

$$2\log_5 x\cdot\left(\frac{3}{2}\log_x 5+2\cdot\frac{3}{2}\log_5 5\right)^{1/2}=-\sqrt{6}.$$

Por sua vez, isso é o mesmo que

$$2\log_5 x\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_5 x}+3\right)^{1/2}=-\sqrt{6}.$$

Fazendo $y=\log_5 x$, concluímos que a equação dada equivale a

$$2y\cdot\left(\frac{3}{2y}+3\right)^{1/2}=-\sqrt{6}. \tag{5}$$

Elevando ambos os membros dessa última equação ao quadrado, obtemos

$$4y^2\cdot\left(\frac{3}{2y}+3\right)=6. \tag{6}$$

Veja que (5) e (6) não são mais equivalentes; (5) implica (6), mas a recíproca não é verdadeira. Assim, após encontrarmos as soluções de (6), teremos de verificar quais delas também resolvem (5)

A fim de resolver (6), distribuímos a multiplicação do primeiro membro, para obter $6y+12y^2=6$ ou, o que é o mesmo,

$$2y^2+y-1=0.$$

Essa equação tem raízes $y=-1$ e $y=1/2$. Dentre esses valores, somente $y=-1$ resolve (5). Então, como $y=\log_5 x$, temos que $\log_5 x=-1$, logo, $x=1/5$. □

Exemplo 8. *Resolva o sistema de equações a seguir:*

$$\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1\\ x^2-y^2=2\end{cases}.$$

Solução. Fatorando a segunda equação, obtemos

$$x+y=\frac{2}{x-y}. \tag{7}$$

Substituindo essa expressão para $x+y$ na primeira equação, obtemos

$$\log_2\left(\frac{2}{x-y}\right)-\log_3(x-y)=1.$$

Essa equação, por sua vez, é equivalente a

$$1-\log_2(x-y)-\log_3(x-y)=1.$$

Mudando o logaritmo de base 3 para a base 2, obtemos

$$-\log_2(x-y)-\frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3}=0,$$

ou seja,

$$\log_3 2\cdot\log_2(x-y)+\log_2(x-y)=0.$$

Assim,

$$(1+\log_3 2)\log_2(x-y)=0$$

e, como $1+\log_3 2\neq 0$, segue que deve ser

$$\log_2(x-y)=0.$$

Então, $x-y=2^0=1$, e (7) fornece $x+y=2$. Por fim, resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases}x-y=1\\ x+y=2\end{cases},$$

chegamos a $x=3/2$ e $y=1/2$. □

Dicas para o Professor

Nesta aula, você vai encontrar alguns exemplos cujas soluções envolvem a aplicação de propriedades ou da definição de logaritmo. Ela pode ser coberta em um ou dois encontros de 50 minutos, dependendo do nível de desenvoltura dos alunos com tema.

Não tivemos a intenção de exaurir todos os exemplos possíveis de identidades, expressões e equações envolvendo logaritmos, mas apenas dar uma rápida ideia de como este objeto pode surgir em problemas desse tipo. Nesse sentido, sugerimos a consulta das sugestões de leitura complementar, onde você poderá encontrar mais exemplos para trabalhar com suas turmas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matematica Elementar, vol.* 3. SBM, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. G. Iezzi, O. Dolce, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol.* 2, quarta edição. São Paulo, Ed. Atual, 1985.
3. E. L. Lima. *Logaritmos*. Rio de Janeiro, SBM, 1991.
4. V. A. Krechmar. *A Problem Book in Algebra*. Moscou, Mir, 1974.