Material Teórico - Trigonometria III

Funções trigonométricas

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de outubro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Funções trigonométricas

Neste módulo, estudamos o seno, o cosseno e a tangente como funções. Especificamente nesta aula, estudaremos as funções seno e cosseno. Em particular, estamos interessados nos gráficos dessas funções, além de definir “domínio”, “imagem” e “funções inversas”. (Estas últimas existirão quando restringimos os domínios das funções seno e cosseno a intervalos adequados.) Recomendamos que o leitor revise os módulos sobre funções, caso não se sinta confortável com o tema.

1.1 Notação e revisão

$$P = (x_p, y_p) = \big(\cos(x), \operatorname{sen}(x)\big).$$

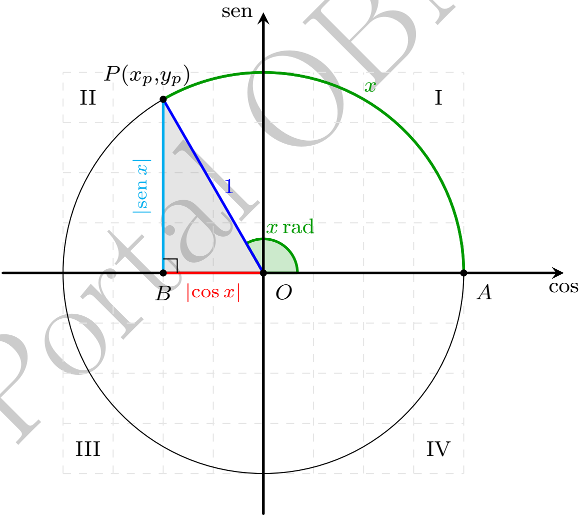


Figura 1: seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Dos módulos anteriores, lembre-se de que, para qualquer real x, o valor de $\operatorname{sen}(x)$ pode ser obtido utilizando-se o círculo trigonométrico, isto é, o círculo de raio 1 e centro em $O = (0, 0)$, como descrito a seguir.

Partindo do ponto $A = (1, 0)$, percorremos um arco de comprimento $|x|$ (ou seja, cujo ângulo central mede $|x|$ radianos) sobre esse círculo, no sentido anti-horário caso $x > 0$ e no sentido horário caso $x < 0$, até chegarmos a um ponto P.

Sejam (x_p, y_p) as coordenadas de P. O deslocamento vertical de P (tendo como referencial o eixo-x) é chamado de ordenada de P e é igual $\text{sen}(x)$; assim, $y_p = \text{sen}(x)$. (Veja a figura 1.) De forma análoga, o deslocamento horizontal de P (sua distância até o eixo-y) é chamado de abscissa de P e é igual a $\cos(x)$. Assim, $x_p = \cos(x)$.

Com isso, podemos calcular os valores de $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ para qualquer valor real de x, inclusive para valores negativos ou maiores do que 2π. Quando $|x| > 2\pi$, daremos mais de uma volta completa no círculo trigonométrico para encontrar P.

Funções periódicas

Antes de definir as funções trigonométricas, vamos falar um pouco sobre um conceito mais geral: funções periódicas. Isso porque as funções trigonométricas são exemplos clássicos de funções periódicas.

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função periódica se existir um número real T *não nulo* tal que, para todo $x \in X$, temos $x + T \in X$ e

$$f(x + T) = f(x).$$

Veja que não basta a equação $f(x + T) = f(x)$ ser satisfeita para alguns valores de x; é necessário que ela seja satisfeita para *todo* x do domínio da função.

Quando existir um valor positivo mínimo para T tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f, diremos que tal valor T é o **período** da função. Quando bem definido, o período é o comprimento do menor intervalo após o qual $f(x)$ passa a se repetir.

Exemplo 1. *Nem toda função periódica possui um período.*

(a) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2$ para todo x é periódica. De fato, como f é constante, a igualdade $f(x+T) = f(x)$ é satisfeita para quaisquer x e T. Nesse caso, não existe um menor valor possível positivo de T.*

(b) *Para um exemplo menos trivial, considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Note que, para qualquer $T \in \mathbb{Q}$, se $r \in \mathbb{Q}$ então $r + T \in \mathbb{Q}$, logo, $f(r + T) = f(r) = 0$; e, se $r \notin \mathbb{Q}$, então $r + T \notin \mathbb{Q}$, logo, $f(r + T) = f(r) = 1$. Assim, para todo racional T, a condição $f(x+T) = f(x)$ é satisfeita para todo x, de forma que não existe um $T > 0$ que seja mínimo.

A Figura 2 traz um exemplo de função periódica em que o período é igual a 6.

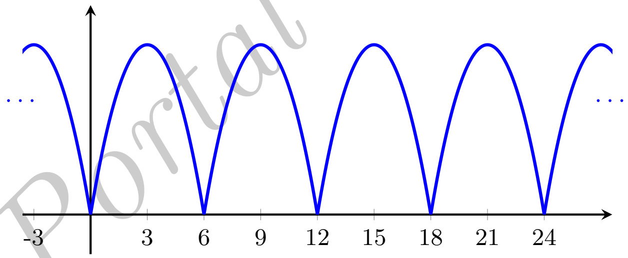
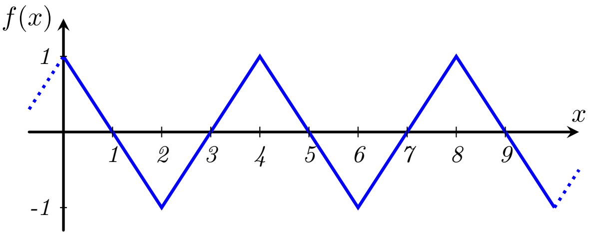
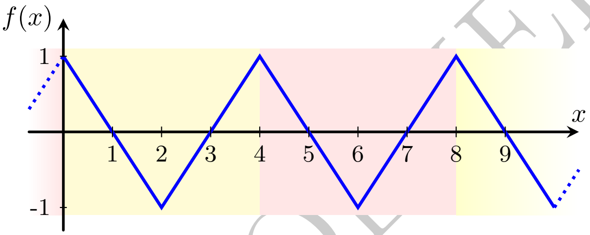


Figura 2: exemplo de uma função periódica.

Exemplo 2. *A função esboçada no gráfico abaixo é periódica. Encontre seu período e calcule o valor de $f(30)$.*



Solução. Observe que o desenho em formato de "V" realizado pelo gráfico ao variarmos x de 0 a 4 se repete indefinidamente.



Assim, para qualquer valor de x temos $f(x+4) = f(x)$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} f(4) &= f(0) = 1, \\ f(5) &= f(1) = 0, \\ f(6) &= f(2) = -1, \\ f(7) &= f(3) = 0, \\ f(8) &= f(4) = 1, \end{aligned}$$

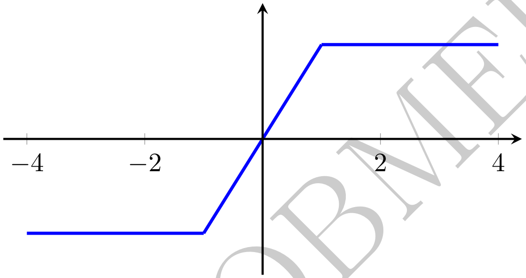
e assim por diante. Isso também vale para números não inteiros, como $f(4{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}5$. Também, não é difícil verificar que $p = 4$ é o menor número positivo que satisfaz $f(x+p) = f(x)$ *para todo* x. Logo o período de f é 4. Por exemplo, apesar de que $f(7) = f(5) = f(3) = f(1) = 0$, não poderíamos dizer que o período é 2, pois $f(6) \neq f(4)$.

Para calcular $f(30)$, veja que $f(30) = f(26)$, já que $30 = 26+4$. Da mesma forma, $f(26) = f(22)$, pois $26 = 22+4$. Por sua vez, $f(22) = f(18)$. Continuando a subtrair 4, obtemos

$f(30) = f(30-4k)$ para todo k inteiro. Em particular, fazendo $k = 7$ (que é o quociente da divisão de 30 por 4), temos que $f(30) = f(2)$. Como $f(2) = -1$, temos que $f(30) = -1$. $\square$

De modo geral, quando f tem domínio $\mathbb{R}$ e é periódica de período p, se conhecermos os valores de $f(x)$ para todo x em algum intervalo de comprimento p, poderemos calcular o valor de $f(x)$ para todo x real.

A seguir, damos um exemplo de função **não periódica**.



2 A função seno

A função seno é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ para todo x. Ou seja, a função cujo domínio é o conjunto dos reais e que associa a cada número real o valor de seu seno. Veja que estamos sempre considerando os valores de x como arcos medidos em *radianos*.

Como $\mathrm{sen}(x + 2\pi) = \mathrm{sen}(x)$ para todo x, temos que:

A função seno é **periódica**. Veremos adiante que seu período é 2π.

Exemplo 3. *Calcule* $\mathrm{sen}(0)$, $\mathrm{sen}(\pi/2)$, $\mathrm{sen}(\pi)$, $\mathrm{sen}(3\pi/2)$ *e* $\mathrm{sen}(2\pi)$.

Solução. Considere o ponto $A = (1, 0)$, um número real positivo x e o ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que $\widehat{AP}$ mede x, sendo o arco $\widehat{AP}$ medido no sentido anti-horário. Quando $x = 0$, o ponto P coincide com A (o arco percorrido tem comprimento zero, logo, não saímos do ponto A). Quando $x = 2\pi$, damos um volta completa no círculo trigonométrico, de modo que P também coincide com A. Assim, $P = (1, 0)$ e, lembrando que a ordenada representa o seno, temos:

$$\text{sen}(0) = \text{sen}(2\pi) = 0.$$

Por sua vez, como um círculo de raio 1 possui comprimento 2π, quando $x = \pi/2$ teremos percorrido $1/4$ dele até chegar ao ponto P. Dessa forma, teremos parado no ponto $P = (0, 1)$, de sorte que $\text{sen}(\pi/2) = 1$. De maneira análoga, quando $x = \pi$, estaremos no ponto $P = (-1, 0)$, logo, $\text{sen}(\pi) = 0$. Por fim, quando $x = 3\pi/2$, estaremos no ponto $P = (0, -1)$, de modo que $\text{sen}(3\pi/2) = -1$. Em resumo, temos a seguinte tabela:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(x)$	0	1	0	-1	0

□

Funções limitadas

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **limitada** quando existe um número real L tal que, para todo $x \in X$, temos

$$-L \leq f(x) \leq L.$$

Em relação à função seno, veja que, para qualquer real x, o ponto P (definido na subseção 1.1) permanece sobre o círculo trigonométrico. Assim, sua distância ao eixo-x é sempre no máximo 1. Mais precisamente, em relação ao eixo-x, o ponto P se desloca de no máximo 1 unidade para cima e no máximo uma unidade para baixo. Dessa forma, temos que

$$-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1,$$

para todo x. Isso demonstra que **a função seno é uma função limitada**. **O mesmo vale para a função cosseno**.

Gráfico do seno

A curva que forma o gráfico da função seno é chamada de **senoide** (pura). A fim de desenhar tal gráfico, vamos escolher alguns ângulos notáveis e marcar pontos que pertencem ao gráfico no plano cartesiano. Devemos marcar os pontos (x, y) tais que $y = \text{sen}(x)$. Vamos começar observando apenas os valores de x entre 0 e 2π. Além dos valores da tabela acima (isto é, aqueles do exemplo 3), podemos utilizar os valores conhecidos dos senos dos arcos $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ (todos entre 0 e $\pi/2$, ou seja, no primeiro quadrante). Esses arcos são equivalentes a 30°, 45° e 60°, de sorte que os valores do seno, cosseno e tangente dos mesmos foram calculados desde o Módulo "*Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares*" do nono ano do EF. Assim, obtemos a tabela abaixo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	2π
$\text{sen}(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0

Observando o ponto P percorrer o círculo trigonométrico de 0 a $\pi/2$ e usando a interpretação de que $\text{sen}(x)$ mede o deslocamento do ponto P para cima ou para baixo (isto é, em relação ao eixo-x), percebemos que o valor de seno aumenta até atingir seu valor máximo, igual a 1, quando $x = \pi/2$. De $\pi/2$ até π o valor $\text{sen}(x)$ diminui até voltar ao valor 0. De π a $3\pi/2$ ele continua diminuindo até chegar a seu valor mínimo, igual a -1. Por fim, de $3\pi/2$ a 2π ele volta a aumentar, até chegar novamente a 0. Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, os pontos $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ são os únicos nos quais $\text{sen}(x)$ atinge seus valores máximo e mínimo, respectivamente.

Usando a técnica de "Redução ao Primeiro Quadrante" (estudada na Aula 1 do módulo de mesmo nome do Primeiro ano do EM), podemos calcular o seno dos arcos cuja redução ao primeiro quadrante resulta em um dos arcos da tabela acima. Por exemplo, quando x está no segundo quadrante, obtemos $\text{sen}(x)$ para x em $\{2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/3\}$. De forma análoga, conseguimos os valores de mais três arcos do terceiro quadrante e outros três do quarto quadrante.

A Figura 3 mostra os pontos que obtemos dessa forma. Note que ela é coerente com nossas observações sobre os intervalos em que $\text{sen}(x)$ cresce ou decresce.

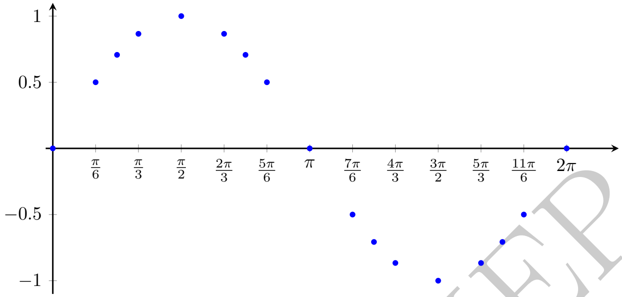


Figura 3: alguns pontos (x, y) tais que $y = \text{sen}(x)$.

Basta, então, ligar esses pontos suavemente (veja a Figura 4) para obter uma boa aproximação do gráfico da função seno no intervalo $[0{,}2\pi]$.

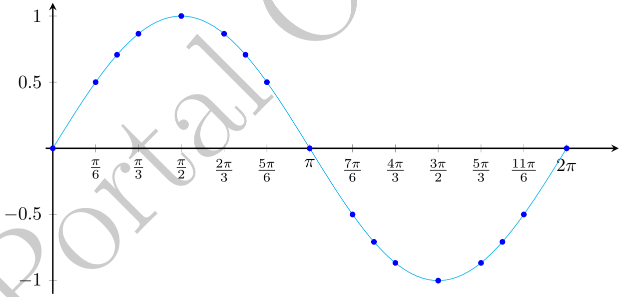


Figura 4: grafico de $y = \text{sen}(x)$ no intervalo $[0{,}2\pi]$.

A Figura 5 mostra outras possíveis escolhas para o ponto P e detalha como o deslocamento de P sobre o círculo trigonométrico é usado para construir o gráfico da função seno: do lado esquerdo temos uma cópia do círculo trigonométrico com alguns pontos marcados; do lado direito temos o gráfico desejado.

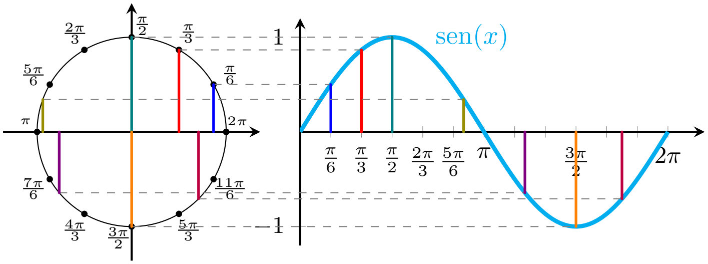


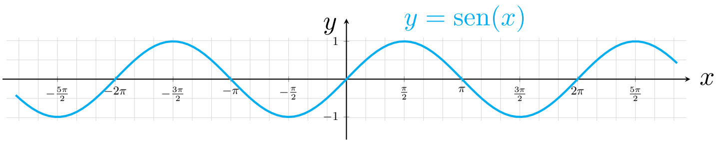
Figura 5: gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$ quando x varia de 0 a 2π, com alguns pontos marcados e seus correspondentes no círculo trigonométrico.

Para obter o gráfico, veja que cada ponto sobre o eixo horizontal do mesmo representa a medida de um arco (em radianos), enquanto a altura de cada ponto do gráfico corresponde ao seno do arco, que é "copiado" da altura do ponto P. Sobre isso, veja também a animação no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif. Um versão iterativa pode ser construída no aplicativo online Desmos: https://www.desmos.com/calculator/fnxb5eqi45. Você pode aumentar ou reduzir o zoom e mover o ponto marcado sobre o círculo.

Por fim, para estender o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ fazendo x variar sobre todos os número reais, basta usar que, para todo x real, vale

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x).$$

Assim, basta repetir o gráfico da Figura 4 infinitas vezes. Dado o tamanho limitado (finito) do papel, na figura abaixo fazemos x variar apenas de -9 a 9:



Observando o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ de 0 a 2π, vemos que para qualquer p com $0 < p < 2\pi$, existe algum x tal que $\operatorname{sen}(x+p) \neq \operatorname{sen}(x)$. De modo que o período da função seno é mesmo igual a 2π (e não algo menor).

2.1 Variando período, amplitude e fase

Como acabamos de observar, o gráfico da função seno tem natureza ondular. (Logo mais, veremos que o mesmo vale para a função cosseno). Assim, há inúmeras aplicações em Física que são modeladas por essas funções. A mais comum é o *movimento harmônico simples*, que descreve o movimento de uma partícula (ou uma massa) que oscila em torno de uma posição de equilíbrio devido a uma força restauradora de intensidade proporcional ao deslocamento em relação a essa posição de equilíbrio, na ausência de atrito. (Por exemplo, o movimento de uma massa presa a uma mola horizontal, oscilando ao longo do eixo da mola na ausência de atrito.) Sistemas físicos mais complexos (tais como as oscilações verticais de uma massa presa a uma mola vertical, ou as oscilações de um pêndulo ideal, ou, ainda, certos fenômenos envolvendo ondas eletromagnéticas) também podem ser descritos com o auxílio dessas funções.

Nessas aplicações, dificilmente o movimento será descrito puramente pela função $\operatorname{sen}(x)$ (senoide pura), mas sim por uma onda que pode ser obtida a partir dela, ajustando-se suas frequência, amplitude e fase.

Fixados números reais A, k e ϕ, a forma geral de uma senoide é dada por

$$f(x) = A \operatorname{sen}(kx - \phi).$$

Vamos estudar o efeito que cada um desses parâmetros tem no gráfico da função.

Caso o leitor tenha acesso fácil à Internet, pode usar uma calculadora de gráficos online, tal como a desmos, para visualizar o efeito de cada parâmetro. O seguinte link direto https://www.desmos.com/calculator/u512tsckf1 traz uma função senoide onde é possível manipular os valores de A, k e ϕ.

(a) A é chamada de *amplitude* e seu valor absoluto representa a altura da onda em relação a seu eixo de simetria.

(b) k é a *frequência angular* e representa a quantidade de ciclos completos que a onda executa quando x varia de 0 a 2π. Note que o período da onda será igual a $2\pi/k$.

(c) ϕ é a *fase* (em radianos) e representa uma translação (horizontal) da onda, para a direita quando ϕ é positivo. A distância da translação é de ϕ/k unidades. Normalmente, a fase é uma ângulo entre 0 e 2π que serve para comparar duas ondas de mesma frequência. Duas ondas que possuem a mesma frequência e com diferença entre fases igual a $\pm\pi$ são ondas opostas e, portanto, se anulam quando somadas.

Exemplo 4. *Seja $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x - \pi)$. Quanto valem a amplitude, a frequência angular e a fase de $f(x)$.*

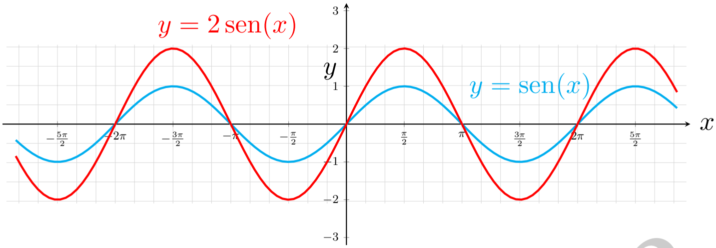
Solução. A amplitude é igual a 3, a frequência angular é igual a 2 e a fase é igual a π radianos. $\square$

Exemplo 5. *Compare os gráficos de*

$$f(x) = \mathrm{sen}(x) \quad e \quad g(x) = 2\,\mathrm{sen}(x).$$

Solução. A função $g(x)$ é obtida da senoide pura aumentando a amplitude para 2. Veja que $g(x) = 2f(x)$ para todo x, o que quer dizer que a altura de cada ponto no gráfico de g será 2 vezes maior que a do ponto de mesma abscissa no gráfico de f. Assim, a amplitude representa a altura da onda, medida a partir de seu eixo de simetria (linha horizontal central). Em particular, como $-1 \le \mathrm{sen}(x) \le 1$ para todo x, temos que $-2 \le 2\,\mathrm{sen}(x) \le 2$.

A seguir, mostramos os gráficos de f e de g.



□

Exemplo 6. *Compare os gráficos de*

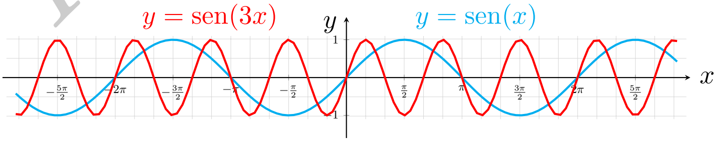
$$f(x) = \mathrm{sen}(x) \quad e \quad g(x) = \mathrm{sen}(3x).$$

Solução. Agora, a função $g(x)$ é obtida da senoide pura mudando apenas a frequência, que passou a ser igual a 3.

Quando $x = 0$, tanto f como g valem zero, ou seja, $f(0) = g(0) = 0$. À medida que x varia de 0 a 2π, a função seno realiza um ciclo completo (fazendo uma oscilação passar pelos valores máximo e mínimo, retornando a 0). Porém, veja o que acontece com a função g. Como $g(x) = f(3x)$ e quando x varia de 0 até $2\pi/3$ o valor de $3x$ varia de 0 a 2π, temos que de 0 a $2\pi/3$ a função g já faz (exatamente) uma oscilação completa.

Por isso, o período de g é $2\pi/3$, e a frequência indica justamente a quantidade de vezes que g oscila, quando x varia de 0 a 2π.

Abaixo, mostramos os gráficos de f e g.



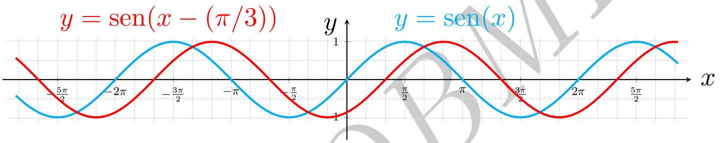
□

Exemplo 7. *Compare os gráficos de*

$$f(x) = \text{sen}(x) \quad e \quad g(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Solução. A função $f(x)$ é uma função senoide pura. Na função $g(x)$ mudamos apenas a fase, que passou a ser igual a $\pi/3$; ou seja, temos que $g(x) = f(x - \pi/3)$. Um transformação desse tipo garante que o gráfico de g é obtido por uma translação do gráfico de f de $\pi/3$ unidades para a direita. Isso porque, quando $x = \pi/3$, temos que $g(\pi/3) = f(0) = 0$, ou seja, g ainda está iniciando seu ciclo.

Abaixo, mostramos os gráficos de f e g.



$\square$

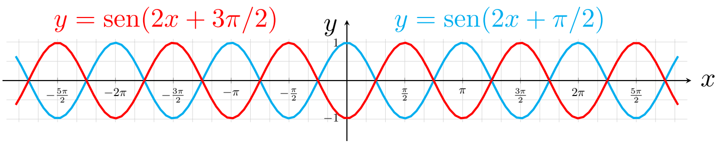
Exemplo 8. *Compare os gráficos de*

$$f(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad g(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Solução. As duas ondas possuem a mesma frequência (igual a 2) e diferença entre as fases igual a

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Por isso, são ondas opostas, conclusão que é confirmada pelo esboço de seus gráficos. Vejamos:



$\square$

Observação 9. *Outra transformação comum de uma função é a translação vertical (quando movemos o gráfico da função para cima ou para baixo). Dada a senoide $f(x) = A\,\mathrm{sen}(kx + \phi)$, podemos mover seu gráfico c unidades para cima, somando um c positivo para obter:*

$$g(x) = f(x) + c = A\,\mathrm{sen}(kx + \phi) + c.$$

Um tal c não possui um nome especial e tem um papel bem diferente da fase, já que é somado fora do argumento da função seno, ao invés de ser somado ao próprio argumento.

3 A função cosseno

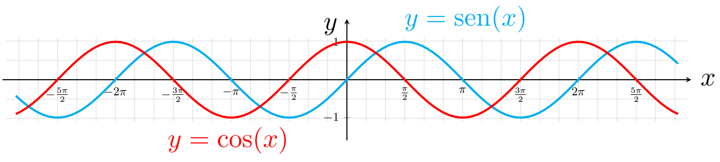
A função cosseno é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

Lembre-se de que $\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$. Há várias maneiras de demonstrar isso. Uma maneira interessante é usar a fórmula do seno da soma de dois arcos, que estudamos no módulo passado:

$$\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \mathrm{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

substituindo $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ na expressão acima, vemos que ela coincide com $\cos(x)$.

O que estudamos nos módulos sobre funções, juntamente com a relação $\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, assegura que o gráfico da função cosseno é simplesmente uma translação horizontal, de $\pi/2$ unidades para a esquerda, do gráfico da função seno. Abaixo, mostramos os dois gráficos no mesmo plano cartesiano, para efeito de comparação (a função cosseno está em vermelho).



Problema 10. *Desenhe o gráfico da função*

$$f(x) = 1 + 2\cos(3x).$$

Dicas para o Professor

Nesta aula, discutimos os gráficos das funções seno e cosseno. Para apreciá-la adequadamente, é importante que os alunos estejam confortáveis com o conteúdo de funções, tenham boa familiaridade com o sistema cartesiano de coordenadas e saibam (genericamente) esboçar e interpretar gráficos de funções.

As referências colecionadas abaixo contém mais sobre *funções trigonométricas.* Em particular, a referência [1] discute em detalhes o movimento harmônico simples e outras propriedades mais profundas das funções seno e cosseno.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo,* $2^{\underline{a}}$ *edição.* SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.